18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giris Bahar Dönemi 2009

TEST 1 ICIN HAZIRLIK SORULARI

1. PROBLEM PT1.1

Bir $E \subset \mathbb{R}$ kümenin ölçülebilir olmasını

$$(1) \quad E \subset \{x \in \mathbb{R} : \sum_n |f_n(x)| = \infty\}$$

koşulunu sağlayan mutlak toplanabilir f_n basamak fonksiyonların varolma koşulu ile tanımlanmıştı.

Tanım 1. Bir $E \subset \mathbb{R}$ kümesinin *Lebesgue ölçümünün sıfır olması* her $\delta > 0$ a karşılık

$$(2) \quad E \subset \cup_i (a_i, b_i), \quad \sum_i (b_i - a_i) < \delta$$

olacak biçimde sayılabilir bir (a_i, b_i) açık aralıkların bulunmasıdır.

Önerme 1. Bir kümenin ölçümünün sıfır olması ile Lebesgue ölçümünün sıfır olması aynıdır.

Kanıt için kendi yönteminizi ya da aşağıdaki işlemleri takip edebilirsiniz.

(1) $\Longleftarrow$ Lebesgue ölçümün sıfır olması her n için

$$(3) \quad E \subset \cup_i I_i^{(n)}, quad \sum_i (b_i^{(n)} - a_i^{(n)} < 2^{-n}$$

koşulunu sağlayan yarı açık $I_i^{(n)} = [a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ aralıkların bulunmasına denk olduğunu gösteriniz. $f_i^{(n)}$ ler önceki basamaktaki $I_i^{(n)}$ aralıkların karakteristik fonksiyonları ise

$$(4) \quad \sum_{i,n} \int \left| f_i^{(n)} \right| < \infty$$

olduğunu gösteriniz.

Bu çift dizileri E üzerinde ıraksayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir dizileri biçiminde ayarlayınız.

Ve böylece E, *Lebesgue ölçümü sıfır* ise o zaman önceki anlamda *ölçümü sıfır* olduğunu gösteriniz.

(2) $\Rightarrow$
E'nin bilinen anlamda ölçümü sıfır ise, f_n (1) deki gibi basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir bir serisi olsun.
her δ ve böylece her N için k, j ler bağlı

$$(5) \quad J_{k,j} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{N<n\leq N+j} |f_n(x)| > 2^k\}$$

kümeleri ele alalım.
k ya da j lerin sabitlenmesiyle bu, f_n ler sabit fonksiyonlar olduklarından yarı-açık aralıkların sonlu birleşimlerider. Buradan Lebesgue öçüm sıfır koşulunu sağlayacak bir örtü inşa edildiğini görünüz.

2. PROBLEM PT1.2

$\mathbb{R}$ de komleks değerli fonksiyonların integrallenebilme tanımını hatırlayınız. Doğrudan tanımı kullanarak, integrallenebilir fonksiyonların gerçel va sanal kısımlarının integrallenebilir olduğunu kanıtlayınız.