

PROBLEMLER 8

Problem 8.1 Sürekli bir fonksiyon $K : [0, 1] \rightarrow L^2(0, 2\pi)$ 'nın her $x \in [0, 1]$ için $K(x) \in L^2(0, 2\pi)$ nin Fourier serisinin düzgün yakınsadığını gösteriniz, yani: $K_n(x)$, $|k| \leq n$ üzerinde Fourier serisinin sonlu toplamı ise $K_n : [0, 1] \rightarrow L^2(0, 2\pi)$ süreklidir ve

$$(16.15) \quad \sup_{x \in [0,1]} \|K(x) - K_n(x)\|_{L^2(0,2\pi)}.$$

İpuçu: Daha önce kanıtı verilen bir Hilbert uzayında kompaktlık özelliğini kullanınız.

Çekirdeği $K \in C([0, 1]^2)$ olan $L^2(0, 1)$ de tanımlı integral operatörünü ele alalım, yani

$$(16.16) \quad T(u)(x) = \int_{(0,1)} K(x, y)u(y).$$

T 'nin L^2 de sürekli olduğunu ve sonlu izi operatörlerin norm kapanışında olduğunu gösteriniz.

İpuçu: Önceki problemi kullanınız. Bu şekilde tanımlanan sürekli fonksiyon K için, $x \in [0, 1] \rightarrow K(x, \cdot) \in C([0, 1])$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ve böylece $K : [0, 1] \rightarrow L^2(0, 1)$ sürekli, dolayısıyla az önceki problem aralık yeniden ayarlanarak uygulanır.

Daha detaylı bir yardımcı görüş: $K(x, y)$ yi $L^2(0, 1)$ de değer alan x değişkenli ve $L^2(0, 1)$ de değer alan fonksiyon olarak ele alabiliriz. $K_n(x, y)$ önceki problemde verilen değişkenleri x, y olan fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun $L^1(0, 1)$ de sonlu izli sürekli fonksiyonlardır bu iyi durum, çünkü kare integrallenebilir. Burada fikir n büyüdükçe sınırlı fark operatörün $K - K_n$ sifıra gitmesidir. Bunu göstermek açıklayıcı olabilir. Diğer durum için x ve y lerin rolleri değiştirilir.

Problem 8.2 Bir değickenli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara odaklanmasına karşın, bazı noktalarda, örtme teoremi 2 boyut için kanıtlandı. $L^2((0, 2\pi)^2)$ nin bir Hilbert uzayı olduğunu gösterdiğinizizi ve bildiğinizi varsayalım-kanıtın çerçevesi $\frac{\exp(ikx+iy l)}{2\pi}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$ fonksiyonlarının tam ortonormal taban olduğunun gösterilmesidir.

Problem 8'nin Çözümleri