PROBLEMLER 5

Aşağıdaki kimi sorularda Lebesgue Sınırlı Yakınsama teoremini hatırlamanızda yarar vardır.

Problem 5.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $L^1(\mathbb{R})$uzayında olsun.

$$(10.16) \quad x \in [-L, L] \quad \text{ise} \quad F_L(x) = f(x) \quad \text{diğer durumda} \quad 0$$

F_L fonksiyonunun $L(\mathbb{R})$ ve $L \to \infty$ iken $\int |f_L - f| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 5.2 Gerçel değerli ve aşağıdaki anlamda yerel integrallenebilir, yani $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun

$$(10.17) \quad g_L(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-L, L] \\ 0, & x \in \mathbb{R} - [-L, L] \end{cases}$$

fonksiyonu her L tamsayısı için Lebesgue integrallenebilirdir koşulunu sağlayan f için

1) Her sabit L sayısı için

$$(10.18) \quad g_L^N(x) = \begin{cases} g_L(x), & g_L(x) \in [-N, N] \\ N, & g_L(x) > N \\ -N, & g_L(x) < -N \end{cases}$$

fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

2)$N \to \infty \quad$ *iken* $\quad \int |g_L^{(N)} - g_L| \to 0$ gösteriniz.

3) Bulunabilinecek h_n basamak fonksiyonları dizisi için, hemen her yerde

$$(10.19) \quad h_n(x) \to f(x)$$

gösteriniz.

4)

$$(10.20) \quad L_{n,L}^{(N)}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-L, L] \\ h_n(x), & h_n(x) \in [-N, N], x \in [-L, L] \\ N, & h_n(x) > N, x \in [-L, L] \\ -N, & h_n(x) < -N, x \in [-L, L] \end{cases}$$

Bu durumda $n \to \infty$ iken $\int |h_n^N - g_L^N| \to 0$ gösteriniz.

Problem 5.3 $L^2(\mathbb{R})$ uzayının Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz. Önce gerçel sayılarla çalışarak $L^2(\mathbb{R})$ uzayını $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|f|^2$ ve yukarıdaki anlamda yerel integrallenebilir fonksiyonlar olarak tanımlayınınz. (1) Böylesi f fonksiyonları için h_n seçip $g_L, g_L^{(N)} \quad h_n^{(N)}$ fonksiyonlarını (10.17),(10.17) ve (10.18) ve (10.20) göre tanımlayınız.

(2) Sabit N ve L sayıları için $h_{n,L}^{(N)}$ dizisini kullanarak $g_L^{(N)}, (g_L^{(N)})^2$ fonksiyonlarının $L^1(\mathbb{R})$ uzayında ve $n \to \infty$ iken $\int |(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2| \to 0$ gösteriniz.

(3) $(g_L)^2 \in L^1(\mathbb{R})$ ve $N \to \infty$ iken $\int |(g_L^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2| \to 0$ gösteriniz.

(4) $L \to \infty$ iken $\int |(g_L)^2 - f|^2 \to 0$ gösteriniz.

(5) $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ise $fg \in L^1(\mathbb{R})$ ve

$$(10.21) \quad |\int fg| \leq \int |fg| \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^2}, ||f||_{L^2}^2 = \int |f|^2$$

gösteriniz.

(6) Yukarıdakileri kullanarak $L^2(\mathbb{R})$ uzayının vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

(7) N sıfırımsı fonksiyonlar ise $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})/N$ uzayının gerçel bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz.

(8) Yukarıdakileri karmaşık sayılara genişletiniz.

Problem 5.4

$$(10.22) \quad h^{2,1} = \{c : \mathbb{N} \ni j \to c_j \in \mathbb{C}, \sum_j (1 + j^2)|c_j|^2 < \infty\}$$

le tanımlanan dizi uzayları için

$$(10.23) \quad h^{2,1} \times h^{2,1} : (c, d) \to < c, d >= \sum_j (1 + j^2) c_j \overline{d_j}$$

iççarpımının $h^{2,1}$ uzayını Hilbert uzayı yapan Hermitsel bir iççarpım olduğunu gösteriniz ve $\forall c \in h^{2,1}$ için

$$(10.24) \quad h^{2,1} \subset l^2, ||c||_2 \leq ||c||_{2,1}$$

gösteriniz.

Problem 5.5 Ayrık uzaylarda Riesz Temsil teoremini doğrudan kanıtlayınız. Ayrık Hilbert uzayı H için ortonormal (e_i) tabanı seçiniz. Eğer $T : H \to \mathbb{C}$ sınırlı ve doğrusal bir fonksiyonel ise

$$(10.25) \quad w_i = \overline{T(e_i)}, i \in \mathbb{N}$$

tanımlayınız.

(1) Şimdi bir C sayısı için, $|Tu| \leq C||u||$ sağlandığını anımsayarak her N tamsayısı için

$$(10.26) \quad \sum_{j=1}^{N} |w_i|^2 \leq C^2$$

gösteriniz.

(2) (w_i) dizisinin l^2 olduğunu gösteriniz ve

$$(10.27) \quad w = \sum_{i} w_i e_i \in H$$

gösteriniz.

(3) Her $u \in H$ için,

$$(10.28) \quad T(u) =< u, w >_H \quad ve \quad ||T|| = ||w||_H$$

gösteriniz.