PROBLEMLER 3

Bu alıştırmalarda Lebesgue integral ile ilgili kimi özellikleri kanıtlamanız buna ek olarak ta kimi soyut kanıtları yapmanız istenecektir. Bir eşitliğin hemen heryerde (h.h.) olması onun ölçümü sıfır olan bir kümenin dışında gecerli olması anlamına gelmektedir.

Soru 3.1 Eğer f ve g, $L^1(\mathbb{R})$ içinde , yani gerçel sayılar üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarsa aşağıdakileri gösteriniz.

(1) Eğer $f(x) \geq 0$ ise $\int f \geq 0$ dır.

(2) Eğer $f(x) \leq g(x)$ ise $\int f \leq \int g$ dır.

(3) Eğer f karmaşık değerli bir fonksiyon ise gerçel kısmı Ref Lebesgue ölçülebilirdir ve

$$|\int Ref| \leq \int |f|$$

(4) Genel karmaşık değerli bir fonksiyon için

$$(6.30) \quad |\int f| \leq \int |f|$$

gösteriniz.(İpucu: Kaynaklara bakabilirsiniz ama genellikle yapılan şey $\theta \in [0, 2\pi]$ almak ve $e^{i\theta} \int f = \int e^{i\theta} f$ kullanarak, önceki eşitsizliği $g = e^{i\theta} f$ de kullanmaktır.

(5) İntegral

$$(6.31) \quad \int : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

sürekli ve doğrusaldır.

Soru 3.2 I gerçel sayıların $(-\infty, a)$ veya (a, ∞) olasılıkların da dışlanmadığı bir aralığı ise bir $f : I \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun Lebesgue integrali

$$(6.32) \quad \vec{f} = \begin{cases} f(x) & x \in I \\ 0 & x \in \mathbb{R} - I \end{cases}$$

Buradan f fonksiyonunun I üzerindeki integrali

$$(6.33) \int_I f = \int \vec{f}$$

olarak tanımlanır.

(1) I üzerinde böylesi integrallenebilir fonksiyonların bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzay $L^1(I)$ ile gösterilecektir.

(2) f fonksiyonu I üzerinde integrallebilir ise $|f|$ fonksiyonun da integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

(3) Eğer f, I üzerinde integrallenebilir ve $\int |f| = 0$ ise $f = 0$ h.h. gösteriniz.

(4) Bir önceki soruda yer alan ve $\mathcal{N}(I)$ ile göstereceğimiz sıfırımsı foksiyonların vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

(5) $\int |f|$ ifadesinin $L^1(I)/\mathcal{N}$ üzerinde norm olduğunu gösteriniz.

(6) $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise

$$(6.34) \quad g : I \to \mathbb{C}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \\ 0 & x \in \mathbb{R} - I \end{cases}$$

ile tanımlanan g fonksiyonunun I üzerinde integrallenebilirliğini gösteriniz.

(7) Yukarıdaki kısıtlama dönüşümünün

$$(6.35) \quad L^1(\mathbb{R}) \to L^1(I)$$

örten ve sürekli olduğunu gösteriniz. (Dikkat: Her iki uzayda integrallenebilir fonksiyonların hemen heryerde eşitlik ile alınmış bölüm uzaylarıdır.)

Soru 3.3 Bir önceki 3.2 nin devamıdır:

(1) $I = [a, b)$ ve $f \in L^1(I)$ ise f fonksiyonunun $I_x = [x, b)$ aralığına kısıtlamasının , her $a \leq x < b$ için $L^1(I_x)$ uzayının öğesi olduğunu gösteriniz.

(2)

$$(6.36) \quad F(x) = \int_{I_x} f : [a, b) \to \mathbb{C}$$

fonksiyonunun sürekliliğini gösteriniz.

(3) $x^{-1}cos(\frac{1}{x})$ fonksiyonunun $(0, 1]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilir olmadığını gösteriniz.İpucu: yukarıda ne gösterdiğimizi biraz düşününüz).

Soru 3.4 (Biraz daha zor ancak yapılabilir!) $f \in L^1(\mathbb{R})$ olsun.

(1) Her $t \in \mathbb{R}$ için , kaydırmalar

$$(6.37) \quad f_t(x) = f(x - t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

lerinde $L^1(\mathbb{R})$ içinde olduğunu gösteriniz.

(2)

$$(6.38) \quad lim_{t \to 0} \int |f_t - f| = 0$$

olduğunu gösteriniz. Bu integrallenebilir fonksiyonların ortalama yakınsaması olarak betimlenir.

(3) $f \in L^1(\mathbb{R})$ için

$$t \to [f_t] \in L^1(\mathbb{R}) \tag{6.39}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Soru 3.5 Son soruda kompakt bir aralıkta sürekli fonksiyonun, aralık dışına sıfır olarak genişletildiğinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon elde edildiğini gördük. Bunu ve basamak fonksiyonlarının $L^1(\mathbb{R})$ de yoğun olduklarını kullanarak bir kompakt aralık dışında sıfır olan $\mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonların $L^1(\mathbb{R})$ içinde yoğun olduğunu gösteriniz.

Soru 3.6 (1) Eğer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sınırlı ve sürekli ve $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise $gf \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunu ve

$$\int |gf| \leq sup_{\mathbb{R}}|g|. \int |f| \tag{6.40}$$

gösteriniz.

(2) Şimdi $C(K)$ bir kompakt metrik uzayı üzerinde sürekli fonksiyonları göstermek üzere $G \in C([0,1] \times [0,1])$ alalım. Artık $L^1[0,1]$ tanımlı olduğuna göre ilk kısmı kullanarak $f \in L^1[0,1]$ ise

$$F(x) = \int_{[0,1]} G(x,.)f(.) \in \mathbb{C} \tag{6.41}$$

ifadesinin [0,1] deki her x için iyi tanımlı olduğunu gösteriniz.

(3) Her $f \in L^1[0,1]$ için F fonksiyonunun [0,1] üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

(4)

$$f \to F \tag{6.42}$$

dönüşümünün $L^1[0,1]$ uzayından $C[0,1]$ uzayına sınırlı (sürekli) olduğunu gösteriniz. Sürekli fonksiyonlar üzerinde sup normunu alınız.