18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

Problem 2'nin çözümleri

Problem 2.1 Derste inşa ettiğimiz B uzayının tamlığını gösteriniz.

Çözüm: Normlu V uzayı ile başlayalım. Bu uzaydan $V^{\sim}$ ile göstereceğimiz ve V deki mutlak toplanabilir serilerden oluşan yeni bir vektör uzayı elde edeceğiz. Sonrada $V^{\sim}$ uzayında, S ile gösterilen ve sıfıra yakınsayan serileri ele alacağız. Burada

$$(6.43) \quad B = V^{\sim}/S$$

bölüm uzayı ile ilgileniyoruz. Bu uzayın normlu bir uzay olduğunu ve (v_n), V uzayında mutlak toplanabilir bir seri olmak üzere, $b = (v_n) + S$ gibi bir öğesinin normunun ise;

$$(6.44) \quad ||b|| = lim_{N\to\infty}||\sum_{n=1}^{N} v_n||_V$$

verildiğini biliyoruz. Bu tanımın, b öğesini temsil eden serilerden bağımsız olduğunu, yani, S den alınıp eklenecek her öğe için aynı olacağını da biliyoruz.

B uzayında mutlak toplanabilir serileri biraz daha iyi anlamak adına, böylesi bir seri, (b_n) alalım. Bilinen

$$(6.45) \quad \sum_n ||b_n|| < \infty$$

olduğudur. Bu serinin B uzayında yakınsadığını gösterelim. İlk ödevimiz limitinin ne olduğunu kestirebilmektir. Her b_n, V uzayında mutlak toplanabilir olan $v_k^{(n)}$ serisidir. Şimdi bu serilerin köşegenlerinden, yeni bir seri tanımlayalım;

$$(6.46) \quad w_j = \sum_{n+k=j} v_k^{(n)}$$

.

Buradaki sorun tanımlanan serinin her zaman V uzayında mutlak toplanabilir bir seri olmayabileceğidir. Hesaplamak istenilen;

$$(6.47) \quad \sum_j ||w_j|| = \sum_j ||\sum_{n+k=j} v_k^{(n)}|| < \infty$$

.

Bunu hesaplamanın tek yolu üçgen eşitsizliğini kullanmak ve

$$(6.48) \qquad \sum_j ||w_j|| = \sum_{k,n} ||v_k^{(n)}||_V$$

hükmetmektir. Sağ tarafta k üzerinden alınan toplamlar sonlu olmalarına karşın bunların toplamlarının sonlu olup-olmadıklarını bilmiyoruz. Şimdi akla gelen ilk şey ile yola çıkarak, b_n ni temsil eden ve mutlak toplanabilir $v_k^{(n)}$ serisini

$$(6.49) \qquad \sum_k ||v_k^{(n)}|| \leq ||b_n||_B + 2^{-n}$$

sağlayacak biçimde seçelim. Önce b_n temsil eden mutlak toplanabilir bir seri olarak u_k seçelim- yani-

$$b_n = lim_{N\to\infty}||\sum_{k=1}^{N} u_k|| \quad ve \quad \sum_k ||u_k|| < \infty$$

sağlansın. M sayısını yeterince büyük seçerek,

$$(6.50) \qquad \sum_{k>M} ||u_k||_V \leq 2^{-n-1}$$

kabul edebiliriz. M 'in bu seçimi ile $v_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{M} u_k$ ve $v_k^{(n)} = u_{M+k-1}, \forall k \geq 2$ alalım. Bu seri hala (b_n) için bir temsildir, çünkü aşağıdaki toplamların farkı, her N için;

$$(6.51) \qquad \sum_{k=1}^{N} v_k^{(n)} - \sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N+M-1} u_k$$

olur. Sağ taraftaki limit, sadece sonlu terim içerdiğinden, sıfıra yakınsar.(6.50) den ötürü,

$$(6.52) \sum_{k}^{N} ||v_k^{(n)}||_V = \sum_{k=1}^{M} ||u_k||_V + \sum_{k>M} ||u_k|| \leq ||\sum_{j=1}^{N} u_j|| + 2\sum_{k>M} ||u_k||$$

$$\leq ||\sum_{j=1}^{N} u_j|| + 2^{-n}$$

N sonsuza giderken alınan limit (6.49) verir.

Her b_n için yukarıdaki özellikleri sağlayan temsilciler seçilip w_j ler (6.46) sağlayacak biçimde seçildiklerinde,(6.47) bize, b_n mutlak toplanabilir olduğundan,

$$(6.53) \quad \sum_j ||w_j||_V \leq \sum_n ||b_n||_B + \sum_n 2^{-n} < \infty$$

verir. Dolayısı ile $(w_j) \in V^{\sim}$ verirki, bu da $b \in B$ demektir.

Son olarak $\sum_n b_n = b$ göstermek istiyoruz. Bu ise

$$(6.54) \quad lim_{N\to\infty} ||b - \sum_{n=1}^{N} b_n|| = 0$$

göstermemizi gerektirir. Hatırlamamız gereken buradaki normun kendisin de bir limit olduğudur-$b - \sum_{n=1}^{N} b_n$ ifadesi n-inci terimi

$$(6.55) \quad w_k - \sum_{n=1}^{N} v_k^{(n)}$$

olan toplanabilir seridir. Normu da

$$(6.56) \quad lim_{p\to\infty} || \sum_{k=1}^{p} (w_k - \sum_{n=1}^{(n)} v_k^{(n)}) ||_V$$

ile verilir. Burada anlamamız gereken $N \to \infty$ iken ne olduğudur! Tanımdan,w_k,lar $v_n^{(n)}$ lerin köşegensel toplamı olduğundan, k üzerinden toplamları köşegensel olmayan $v_k^{(n)}$lerin ilk p-terimin toplamı ile uzunlukları N(n) türünden, yüksekliği p olan dikdörtgen üzerinden alınan toplamın farkı kadardır. Dolayısı ile üçgen eşitsizliğinden farkın normunu, normların ' kullanılmayan terimler üzerinden ' üzerinden alınan toplamlar ile hesaplıyabiliriz. Buradan $L = min(p, N)$ olmak üzere

$$(6.57) || \quad \sum_{k=1}^{p} (w_k - \sum_{n=1}^{N} v_k^{(n)} ||_V \leq \sum_{l+m\geq L} ||v_l^{(m)}||_V$$

buluruz. Bu toplam sonludur. $p \to \infty$ iken bunu $l + m \geq N$ olan toplamla değiştirebiliriz. Şimdi, $N \to \infty$ iken, (çifte serinin) mutlak toplanabilirliğinden sıfıra yakınsar. Dolayısı ile;

$$(6.58) \quad lim_{N\to\infty}||b - \sum_{n=1}^{N} b_n||_B = 0$$

ederiz ve bu tam da istediğimiz, $\sum_n b_n = b$ dir.

Problem 2.2 Şimdi basamak fonksiyonlarının mutlak toplanabilir bir seri örneğini düşünelim. Sağdan kapalı, soldan açık $[0,1)$ aralığını ele alalım. Alışılagelmiş Cantor kümesi inşasının biraz değişik hali olan aşağıdaki inşa'yı düşünelim. Ortadaki merkezi aralık $[1/3, 2/3)$ çıkarıp, geriye kalan $C_1 = [0,1/3) \cup [2/3,1)$ kümesinden yine merkezi aralıkları çıkartarak geriye kalan $C_2 = [0,1/9) \cup [2/9,1/3) \cup [2/3,7/9) \cup [8/9,1)$ kümesini ve bu şekilde devam ederek her biri yarı-açık, yarı-kapalı aralıkların sonlu birleşimleri olan $C_k \subset C_{k-1}$ kümelerini düşünelim. Şimdi herbiri C_k kümelerinin karakteristik fonksiyonu olan f_k fonksiyonlarından oluşan seriyi ele alalım.

(1) Bu seri mutlak toplanabilir bir seridir.

(2) $[0,1)$ deki hangi x öğeleri için $\sum_k |f_k(x)|$ serisi yakınsar.

(3) Yukarıdaki seri ile tanımlanan $[0,1)$ üzerinde tanımlı hangi fonksiyon Lebesgue integrallenebilirdir? İntegralini hesaplayınız?

(4) Bu fonksiyon Riemann integrallenebilir midir?

(5) Yukarıdaki inşa sırasında atılan aralıkların birleşimlerinde bir, dışında sıfır olan fonksiyon g olsun.g fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu ve integralini hesaplayınız.

Çözüm: (1) Her seferinde aralıkların toplam boyu 1/3 oranında azalmaktadır. Bu nedenle $l(C_k) = 2^k/3^k$ dır. Buradan, f fonksiyonunun negatif olmayan integrali

$$(6.59) \quad \int f_k = 2^k/3^k \Rightarrow \sum_k \int |f_k| = \sum 2^k/3^k = 2$$

bulunur ve seri mutlak toplanabilirdir.

(2) C_k azalan bir kümeler dizisi olduğundan, sadece

$$(6.60) \quad x \in E = \bigcap_k C_k$$

için $\sum_k |f_k(x)|$ serisi ıraksak, diğer durumlar için yakınsaktır.

(3) Serinin yakınsadığı yerlerde, serinin toplamı, diğer durumlarda 0 olarak tanımlanan

$$(6.61) \quad f(x) = \begin{cases} \sum_k f_k(x), x \in \mathbb{R} \setminus E \\ 0, x \in E \end{cases}$$

tanımlanan fonksiyon, tanımdan,integrallenebilirdir. Integrali ise, yine tanımdan,

$$(6.62) \quad \int f = \sum_k \int f_k = 2$$

(4) f fonksiyonu sınırlı olmadığından, tanım gereği, Riemann integrallenebilir değildir. Özellikle, boş olmayan $C_k - C_{k+1}$ kümesindeki bir x için $f(x) = k$ dır.

(5) F ile gösterilen ve çıkarılan kümelerin birleşimi olan küme $[0, 1) - E$ dir. Çıkarılan kümelerin herbirinde 1 olan basamak fonksiyonları mutlak toplanabilir bir seri verir. Bu fonksiyonlar negatif değildirler ve $k = 1, 2, ...$ için k-inci aralıktaki integrali $1/3 \times (2/3)^{k-1}$dir. Bu seri, F kümesi üzerinde g fonksiyonuna yakınsar. Dolayısıyla g Lebesgue integrallenebilirdir ve integrali

$$(6.63) \quad \int g = 1$$

dir.

Problem 2.3 $\mathbb{R}^2$ için örtme lemması. Bir dörtgen ile kast edilen küme $\mathbb{R}^2$ de $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ biçiminde olan bir kümedir.

Böylesi bir dörtgenin alanı $(b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$ olarak tanımlıdır.

(1)Bir dörtgeni tanımlayan aralıkları aralıklara bölerek dörtgeni de altdörtgenlere bölmüş oluruz. Böylesi bir bölümme ile elde edilen dörtgenlerin alanlarının toplamının ilk dörtgenin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

(2) yarı-açık-kapalı anlamında sonlu tane keşişmeyen dörtgenin birleşimi de bir dörtgen ise alanların toplamının, birleşimin alanına eşit olduğunu gösteriniz.(ipuçu: altaralıklara bölerek ilerleyiniz).

(3) Bir dörtgen içinde olan, sayılabilir çoklukta, keşişmeyen dörtgenlerin alanlarının toplamının büyük dörtgenin alanından küçük veya eşit olduğunu gösteriniz.

(4) Sonlu sayıda dörtgenin birleşimi verilen bir dörtgeni içeriyorsa, dörtgenlerin alanlarının toplamının en az birleşimlerini içeren dörtgenin alanı kadar olduğunu gösteriniz.

(5) Bir önceki alıştırmayı sayılabilir çokluktaki dörtgenlere genişletiniz.

Çözüm: (1) Bir dörtgen için bu oldukça açıktır. Çünkü sadece bir iç nokta c için ya ilk aralığı ya da ikincisini iki altaralığa bölebiliriz. Bölündükten sonra iki dörtgenin alanları ya

$$(6.64)(c-a_1)(b_2-a_2)+(b_1-c)(b_2-a_2)=(b_1-c)(b_2-a_2)$$

veya

$$(b_1-a_1)(c-a_2)+(b_1-a_1)(b_2-c)=(b_1-c)(b_2-a_2)$$

olacaktır. Buradan, tümevarımla, bölünmüş dörtgenlerin alanlarının toplamının ilk dörtgenin alanına eşit olduğuna hükmederiz.

(2) Eğer sonlu tane keşişmeyen dörtgenin birleşimi yine,$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ şeklinde bir dörtgen ise, bu dörtgenlerin herhangi birinin bölünmesi ile elde edilen dörtgenlerin birleşimi için de aynı şey doğrudur. Üstelik, böylesi bir bölümme ile elde edilen dörtgenlerin alanlarının toplamı da aynı kalır. Şimdi, $C_1 \subseteq [a_1, b_1)$ kümesi böylesi dörtgenlerin ilk aralıklarının son noktalarından oluşan küme olsun. Benzer biçimde, C_2 kümesi de dörtgenlerin ikinci aralıkta olan son noktalarından oluşan küme olsun. Dörtgenlerin her birini C_1, C_2 kümelerinin son noktalarını kullanarak sonlu kez bölelim. Böylece elde edilen dörtgenlerin toplam alanları değişmeyecektir.$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ dörtgenini örten dörtgenler A_i, $[a_1, b_1)$ aralığını örten ve keşişmeyen dörtgenlerden,B_j,$[a_2, b_2)$ dörtgenini örten ve keşişmeyen dörtgenlerden olmak üzere, $A_i \times B_j$ biçimindedirler. Sınıfta yapılan bir boyutlu örneğe benzer biçimde ilk aralığı A_i den olmak üzere böylesi aralıkların alanlarının toplamı aşağıdaki çarpımdır:

$$(6.65) \quad A_i boyu \times (b_2-a_2)$$

biçimindedir. Şimdi i üstünden toplam alır ve aynı neticeyi bir kez daha kullanarak aradığımız sonuça varabiliriz.

(3)$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ dörtgeninde bulunan sonlu tane keşişmeyen dörtgen ailesine aynı bölme işlemini yapabilir ve bu aileye keşişmeyen yeni dörtgen ailesi ekleyerek büyük dörtgeni örten bir aile bulabiliriz.Burada daha önceki sonuçumuzu kullanarak dörtgenlerin alanlarının toplamının $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$ çarpımından küçük veya eşit olduğuna hükmedebiliriz. Buradan da sayılabilir ve keşişmeyen dörtgenler ailesinin alanları toplamının yukarıdaki sabitten küçük veya eşit olduğuna hükmedebiliriz.

(4) $D_i, i = 1, ..., N$ dörtgenlerinin birleşimi D dörtgenini içersin. D_1 dörtgenini D dörtgeninin son noktalarını kullanarak alt dörtgenlere bölelim. Böylece elde edilen dörtgenler ya tamamen D içindedirler veya onu kesmezler.D_1 dörtgenini (gerçekte biricik olan)tamamen D içinde kalan dörtgenle değiştirelim. Şimdi tümevarım'a başvurarak ilk $N-k$ dörtgenin keşişmediğini,ve tümünün D

içinde kaldığını ve birleşimlerinin D dörtgenini örttüğünü varsayabiliriz. Şimdi, bir sonraki dörtgene, D_{N-k+1} dörtgenine bakalım. Bu dörtgeni daha önceki $D_1, ..., D_k, D$ dörtgenlerini belirleyen aralıkların son noktalarını kullanarak alt dörtgenlere bölelim. D_{N-k+1} dörtgeninin bölümmesinden sonra elde edilen dörtgenler ya tamamen bir $D_j, j \leq 1, ..., N-k$ içinde kalırlar ya da D içinde değildirler. Bunları atarak k sayısını bir azaltırız. Başka bir deyişle, tümevarımla,dörtgenleri bölerek ve gerekmeyenleri atarak, birbirlerini kesmeyen,D içinde kalan ve birleşimleri D dörtgenini örten bir aile elde ederiz.Bu yeni dörtgenler ailesinin alanları toplamı, bir önceki gözlemden, tamtamına D' nin alanına eşittir. Dolayısı ile alanlar toplamı başlangıçta, en az, bu kadardır.

(5) $D = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ dörtgenini örten, sayılabilir dörtgenler, ailesi için bir boyuttaki gibi hareket ederiz. İlk olarak kenarların boylarını üsten sınırlayan bir C sabiti olduğunu kabul edebiliriz. Sonra k-inçi dörtgeni biraz daha büyük olacak şekilde, her iki üst limiti de, $\delta > 0$ olmak üzere, $2^{-k}\delta$ kadar büyütürüz. Şimdi alan artmıştır ama bu artış $2C2^{-k}$ dan büyük değildir. Şimdi de örten sayılabilir kümeyi her biri kompakt bir küme olan $[a_1, b_1 - \delta] \times [a_2, b_2 - \delta]$ ile büyütelim. Kompaktlık gereği örten açık kümelerin sonlu tanesi de yine açık bir örtü olaçaktır. Şimdi aynı teoremin yarı-açık biçimini kullanarak, aynı son noktaları kullanan ve $[a_1, b_1 - \delta) \times [a_2, b_2 - \delta)$ için bir örtü bulabiliriz. Daha önce elde edilen sonlu haldeki sonuçu kullanarak,

$$(6.66) \quad alanlar \quad toplam\imath + 2C\delta \geq alan D - 2C\delta$$

bulunur.δ keyfi olduğundan, sonuça ulaşılmıştır.□

Sizleri basamak fonksiyonlarının integrallerini alma konusundaki detayları öğrenmeye teşvik etmek isterim.Şimdi aralıklar yerine dörtgenleri kullanarak, yaptığımız her şeyin iki boyuta da yapılabileceğini görmenizi istiyorum. İşin gerçeğine bakarsanız her şey $\mathbb{R}^n$ de de çalışır.

Problem 2.4 (1) $[0, 1]$ üzerindeki her sürekli fonksiyon bir basamak fonksiyonları dizisinin düzgün limitidir.(İpuçu: Önçe gerçel durumu düşünün. Aralığı 2^n eşit parçaya bölün ve basamak fonksiyonlarını o altaralık üzerinde sürekli fonksiyonun infimumu olarak tanımlayın. Sonrada düzgün yakınsaklık kullanın.

(2) Calculus'te öğrendiğiniz 'teleskop eden seri' hilesini kullanarak $[0, 1)$ üzerindeki her sürekli fonksiyonun f_j fonksiyonları basamak fonksiyonları ve $\forall x \in [0, 1), \quad \sum_j |f_j(x)| < \infty$ olmak üzere

$$(6.67) \quad \sum_i f_i(x), \forall x \in [0, 1)$$

yazılabileceğini kanıtlayınız.
(3) Buradan $[0,1]$ üzerindeki her sürekli fonksiyonun bu aralığın dışına o olaçak biçimde genişletildiğinde, Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Sürekli bir fonksiyonun gerçel ve sanal kısımları da sürekli olduğundan önce gerçel değerli sürekli fonksiyonlar için kanıt yapar sonra da toplama yaparız. Sürekli fonksiyonların kompakt kümeler üzerindeki düzgün sürekliliklerinden, ki burada küme $[0,1]$ kümesidir. verilen n sayısı için öyle bir N buluruzki $|x-y| \leq 2^{-N}$ için $|f(x)-f(y)| \leq 2^{-N}$ olur. Şimdi N ,n bağlı olmak üzere verilen aralığı 2^N eşit parçaya bölerek her altaralığın kapanışında basamak fonksiyonu f_n, $minf = inff$ olacak biçimde tanımlanırsa,

$$(6.68) \quad |f(x)-F_n(x)| \leq 2^{-n}, \forall x \in [0,1)$$

ve (6.68) deki eşitsizlik aralıkların son noktalarında da geçerli olur. Dolayısı ile $[0,1)$ kümesi üzerinde düzgün olarak $F_n \to f$ yakınsaması vardır.
(2) $f_1 = F_1$, ve $k > 1$ için $f_k = F_k - F_{k-1}$ tanımlanırsa, bunlar basamak fonksiyonları olacaklar ve

$$(6.69) \quad \sum_{k=1}^{n} F_k = f_n$$

sağlanır ve F_{n+1} tanımındaki aralık F_n için de bir altaralık olacaktır.F_n tanımındaki her altaralıkta f'in değeri 2^{-n} den fazla değişemiyeçeği için ,

$$(6.70) \quad |f_n(x)| = |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n}, \forall n > 1$$

bulunur ve buradan da $\int |f_n| \leq 2^{-n}$ elde ederiz. Bu serinin mutlak toplanabilir olduğunu verir. Esasında seri $[0,1)$ aralığının her noktasında yakınsaktır ve (6.68) gereğince f fonksiyonuna düzgün yakınsar.
(3) Bu nedenle f Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyondur.
(4) Sağ taraftaki integral Riemann integrali olmak üzere

$$(6.71) \quad \int f = \int_o^1 f(x)dx$$

eşitliğini sormamışım. Fakat, bu aşağıdaki

$$(6.72) \quad \int f = lim_n \int F_n$$

eşitliğiden ve basamak fonksiyonlarının $[0, 1]$ üzerindeki integralleri değerlerinin o altaralıktaki üst Riemann toplamları ve alt Riemann toplamları arasında kalmasından elde edilir.$\square$