

MIT Açık Ders Malzemeleri

<http://ocw.mit.edu>

18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar

2008 Güz

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için

<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitesini ziyaret ediniz.

Ders #8: Eğrisel İntegraller
(Ders kitabında 101-108. sayfalar)

Ders #8 ile ilgili uyarılar

Aşağıdaki kural (yerine koyma yöntemi) oldukça sık kullanılır:

Teorem 1 $w = \varphi(z)$ bir Ω bölgesinde holomorfik fonksiyon olsun. γ , Ω bölgesinde bir eğri olsun. Bu durumda

$$\int_{\varphi(\gamma)} f(w) dw = \int_{\gamma} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz \quad (1)$$

dir.

İspat: γ eğrisi

$$\gamma : z(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

ile verilsin. Bu halde $\varphi(\gamma)$

$$\varphi : w(t) = \varphi(z(t)), \alpha \leq t \leq \beta$$

ile verilir. Buradan (1) bağıntısının sol yanı

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(w(t)) w'(t) dt$$

ve sağ yanı

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(z(t))) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(w(t)) w'(t) dt$$

olur. ■

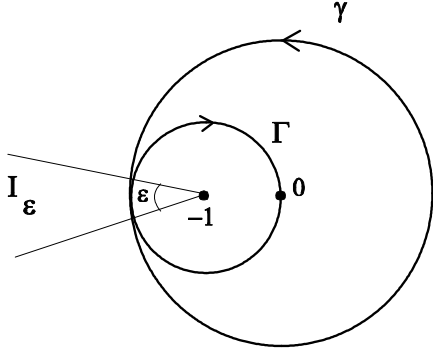
108. Sayfadaki 3. Alıştırmanın çözümü

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right)$$

olduğundan problem, $\gamma : |z| = 2$ çemberi olmak üzere,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - 1} dz \quad \text{ve} \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z + 1} dz$$

integrallerini hesaplamaya indirgenir.



Şekil 8.1

$\log(z + 1)$ fonksiyonu, I_ε köşesi -1 de olan ve ε açısıyla açılan kama şeklindeki bölge olmak üzere, $\mathbb{C} \setminus I_\varepsilon$ bölgesinde holomorftür. Bu bölgede

$$\frac{d(\log(z + 1))}{dz} = \frac{1}{z + 1}$$

dir. $\varepsilon \rightarrow 0$ için 107. sayfamın ortasındaki teoremden,

$$\int_{\gamma+\Gamma} \frac{1}{z + 1} dz = 0$$

sonucu çıkarılır.

Buradan

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z + 1} dz = 2\pi i$$

bulunur. Benzer biçimde, $|z - 1| = 1$ çemberi kullanılarak,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - 1} dz = 2\pi i$$

olur. Sonuç olarak

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz = 0$$

elde edilir.

Yerine koyma yöntemiyle, yukarıda elde edilen sonuç daha kolay elde edilir:

$$\varphi(z) = -z$$

ise

$$\varphi(\gamma) = \gamma \quad (\text{yönlendirmeyi de içerek})$$

dır. Böylece

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2-1} dz = - \int_{\gamma} \frac{1}{z^2-1} dz$$

olur.

Daha genel olarak aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 2 R, \mathbb{C} de tanımlı bir rasyonel fonksiyon olsun. Orijin civarındaki her γ çemberi için, γ üzerinde $R(z^2) \neq 0$ ise,

$$\int_{\gamma} R(z^2) dz = 0$$

dır.