Ders #3: Analitik Fonksiyonlar; Rasyonel Fonksiyonlar

(Ders kitabında 21-32. sayfalar)

Ders #3 ile ilgili hatırlatmalar

▶ Sayfa 32 deki (14) numaralı formül $R(\infty) = \infty$ varsayımı altında ispatlandı. Öte yandan, $R(\infty)$ sonlu ise, (12) gösterilişi $G \equiv 0$ olmak üzere geçerlidir. Bu halde, $R(\beta_j + \frac{1}{\zeta})$ için olan önceki ispatı kullanarak (14) gösterilişini tekrar elde ederiz.

▶ Sayfa 29 daki teorem 1 in daha kuvvetli biçimi aşağıdaki biçimdedir:

Teorem 1 *(Kuvvetli biçim) $P(z)$ polinomunun sıfırlarını kapsayan en küçük konveks küme aynı zamanda $P'(z)$ polinomunun da sıfırlarını kapsar.*

İspat: P nin sıfırları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olsun:

$$P(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n).$$

O halde

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{z-\alpha_n}$$

dir. z_0, $P'(z)$ nin bir sıfır yeri ve $z_0 \neq \alpha_i$ $(\forall i = 1, 2, ..., n)$ ise, $z = z_0$ için yukarıdaki ifade sıfırdır. Bu halde eşitliğin her iki yanının eşleniği alınır ve düzenlenirse,

$$\frac{z_0 - \alpha_1}{|z_0 - \alpha_1|^2} + \cdots + \frac{z_0 - \alpha_n}{|z_0 - \alpha_n|^2} = 0$$

olur ve $m_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$ olmak üzere

$$z_0 = m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n$$

bulunur. Şimdi yalnızca aşağıdaki basit sonucu ispatlamak yeterlidir:

Önerme 1 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *verilsin.*

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i a_i \mid m_i \geq 0 \ ve \ \sum_{i=1}^{n} m_i = 1 \right\} \tag{1}$$

kümesi, tüm a_i sayılarını içeren tüm konveks kümelerin kesişimidir. (Bu kümeye $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nin ***konveks zarfı*** *denir.)*

İspat: (1) deki her $\sum_{i=1}^{n} m_i a_i$ noktasının, a_i yi içeren her konveks küme tarafından içerildiğini, böylece C de olacağını göstermek zorundayız. $m_i > 0$ $(1 \leq i \leq p)$ ve $m_j = 0$ $(j > p)$ olmak üzere

$$x = \sum_{i=1}^{p} m_i a_i$$

biçiminde olsun. p üzerinden tümevarımla, $x \in C$ olduğunu kanıtlayalım. $p = 1$ ise iddia açıktır.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{p-1} m_i$$

ve

$$a = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{m_i}{\lambda} a_i$$

diyelim. İndüksiyon hipotezinden, $a \in C$ dir. Öte yandan, $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$x = \sum_{i=1}^{p} m_i a_i = \lambda a + (1 - \lambda) a_p$$

olduğundan, $x \in C$ olur. ■

Sayfa 33 deki 4. problemin çözümü

$R(z)$ rasyonel ve $|z| = 1$ için

$$|R(z)| = 1$$

olsun. O halde

$$\left| R(e^{i\theta}) \right| \equiv 1, \ \theta \in \mathbb{R}$$

dir. $S(z)$, $R(z)$ nin katsayılarının eşleniği alınarak elde edilen rasyonel fonksiyon olsun. Bu halde,

$$R(e^{i\theta}) S(e^{-i\theta}) = R(e^{i\theta}) \overline{R(e^{i\theta})} = 1$$

olur. Böylece, $|z| = 1$ çemberi üzerinde

$$R(z) S(\frac{1}{z}) = 1$$

elde edilir. Paydalarını sadeleştirerek, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$R(z) S(\frac{1}{z}) = 1$$

bağıntısının gerçeklendiği görülür.

Bir polinomun sonlu sayıda sıfırı olduğundan, $R(z)$ nin 0 veya ∞ dan farklı sıfırları

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$$

$S(z)$ nin kutuplarıdır ve 0 veya ∞ dan farklıdır. Böylece S nin tanımından,

$$\frac{1}{\overline{\alpha}_1}, \frac{1}{\overline{\alpha}_2}, \ldots, \frac{1}{\overline{\alpha}_p}$$

$R(z)$ nin kutuplarıdır ve 0 veya ∞ dan farklıdır. Buradan

$$R(z)\left(\frac{z-\alpha_1}{1-\overline{\alpha}_1 z}\cdots\frac{z-\alpha_p}{1-\overline{\alpha}_p z}\right)^{-1}$$

fonksiyonunun muhtemelen 0 ve ∞ dışında kutbu veya sıfırı yoktur. Bu nedenle C sabit, $|C| = 1$ ve l tamsayı olmak üzere

$$R(z) = Cz^l \frac{z-\alpha_1}{1-\overline{\alpha}_1 z}\cdots\frac{z-\alpha_p}{1-\overline{\alpha}_p z}$$

biçimindedir. Tersine, böyle bir R fonksiyonu için $|z| = 1$ iken $|R(z)| = 1$ dir.