Ders #12: Yerel Tasvir. Schwarz Lemması ve Öklidyen Olmayan Yorum

(Ders kitabında 130-136. sayfalar)

Ders #12 ile ilgili uyarılar

131. sayfadaki Teorem 11 in ispatı

Eğer a ve b, $\mathbb{C} - \Gamma$ nın aynı bileşeninde iseler 131. sayfadaki son formülden

$$\sum_j n\left(\gamma, z_j(a)\right) = \sum_j n\left(\gamma, z_j(b)\right) \tag{1}$$

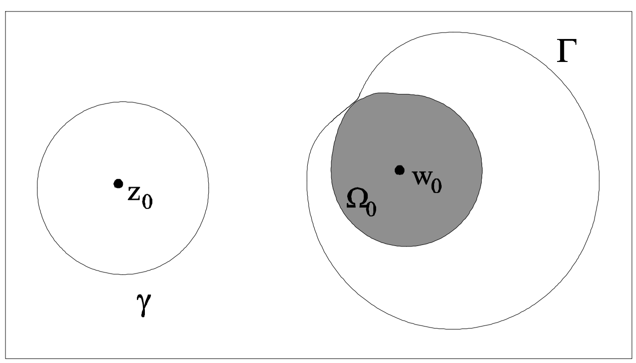
anlaşılır. (1) eşitliğindeki γ yı aşağıdaki gibi parametreleyelim:

$$z(t) = z_0 + \varepsilon e^{it} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$\varepsilon > 0$ sayısı

$$f(z) - w_0 = 0$$

denkleminin γ içindeki tek kökü z_0 olacak biçimde yeterince küçük seçilsin. ($f(z) - w_0 = 0$ denkleminin kökleri ayrıktır.)



Şekil 12.1

$\Gamma = f(\gamma)$ olsun ve $\mathbb{C} - \Gamma$ nın w_0 ı içeren bileşenini Ω_0 ile gösterelim. γ bir çember olduğundan, $z_j(a)$ nın γ nın içinde veya dışında olmasına bağlı olarak

$$n\left(\gamma, z_j(a)\right) = 0 \text{ veya } 1$$

olur. ($a \notin \Gamma$ olduğundan $z_j(a) \notin \gamma$ dır.) Bu nedenle (1) eşitliğinin sol tarafı, f nin γ içinde a değerini aldığı noktaların sayısına eşittir.

(1) eşitliğinde $a \in \Omega_0$ keyfi alalım ve $b = w_0$ olsun. γ nın seçimine bağlı olarak, (1) eşitliğinin sağ tarafı n ye eşittir. Böylece (1) eşitliğinin sonucu olarak Ω_0 daki her değer f tarafından γ içinde n kez alınır. (Katlı köklerin katlılıkları sayılmak üzere).
Özel olarak, bu durum Ω_0 içindeki w_0 merkezli her $|w - w_0| < \delta$ dairesi için doğrudur. ■

Uyarı: $n(\delta, z)$ dönme sayıları ile ilgili olarak, parametrelemeye dikkat etmeliyiz. Nitekim

$$\gamma(t) = e^{it} \;\; (0 \leq t \leq 2\pi)\,, \quad f(z) = z^n$$

ve $\Gamma = f(\gamma)$ ise, γ ve Γ geometrik olarak aynı nokta kümeleriyle gösterilmelerine rağmen

$$n(\gamma, 0) = 1, \quad n(\Gamma, 0) = n$$

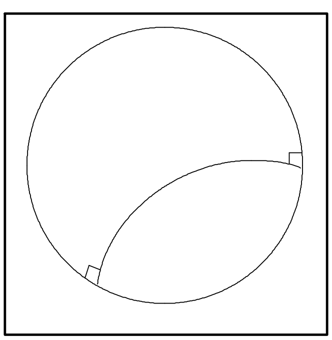
olur.

Öklidyen Olmayan Düzlem

Öklidyen olmayan düzlem, aşağıdaki kabullerle $|z| < 1$ birim dairesidir:

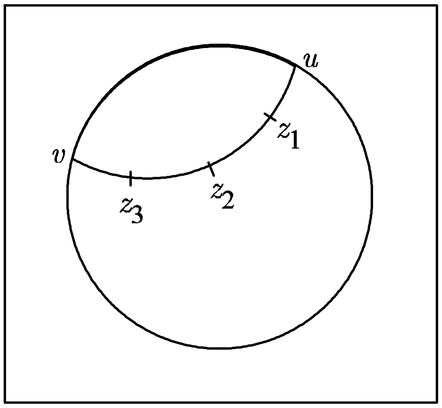
a) Öklidyen olmayan nokta = Daire içindeki nokta;

b) Öklidyen olmayan doğru = Dairenin sınırına dik olan yay.



Bu model, ünlü **Paralellik Aksiyomu** dışındaki tüm Öklid aksiyomlarını gerçekler.
Bir ℓ doğrusu dışında bir p noktası verilsin. Bu halde, bu noktadan geçen ve ℓ doğrusu ile kesişmeyen yalnızca bir doğru vardır.
Yukarıdaki model açıkca bu aksiyomu sağlamaz; dolayısıyla 2000 yıllık, diğer aksiyomlar esas alınarak, Paralellik aksiyomu problemini çözmek mümkün değildir.

Şimdi Öklidyen olmayan D düzlemindeki uzaklığı tanımlayalım.



$z_1, z_2 \in D$ verilsin, Öklidyen olmayan doğrunun $|z| = 1$ çemberi ile kesim noktalarını sırasıyla u, v ile işaretleyelim.

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \frac{1}{2}\log(z_1, z_2, v, u) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{z_1 - v}{z_1 - u} : \frac{z_2 - v}{z_2 - u}\right) \end{aligned}$$

olsun. Çifte oranın sonucu reeldir (sayfa 79) ve geometrik özelliklerden kolayca gösterilebilir ki bu sonuç ≥ 1 dir.

Böylece

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &\geq 0, \\ d(z_1, z_2) &= d(z_2, z_1) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki formülden

$$d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_3, z_2)$$

bağıntısının gerçeklendiğini göstermek kolaydır. Şimdi

$$z_2 \to 0 \text{ ve } z_1 \to \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_2 z_1}\right|$$

ne resmeden

$$z \longrightarrow e^{i\varphi}\frac{z - z_2}{1 - \overline{z}_2 z}$$

doğrusal kesirli dönüşümünü gözönüne alalım. Bu halde v, z_2, z_1, u noktalarının sıralanışından

$$v \to -1 \text{ ve } u \to 1$$

çıkar. Çifte oranın değişmezliğinden (invaryantlığından)

$$\begin{aligned} d(z_2, z_1) &= \frac{1}{2}\log(0, \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_2 z_1}\right|, -1, 1) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{|1 - \overline{z}_2 z_1| + |z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_2 z_1| - |z_1 - z_2|}\right) \qquad \text{(Alıştırma 7)} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d(z,z+\Delta z)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2\left|\Delta z\right|}{\left|1-\overline{z}(z+\Delta z)\right|-\left|\Delta z\right|}\right)$$

bulunur. Öte yandan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

olduğundan

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{d(z,z+\Delta z)}{\left|\Delta z\right|}=\frac{1}{1-\left|z\right|^2}$$

bulunur. Bu ise bize

$$\gamma : z(t) \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

eğrisinin Öklidyen olmayan uzunluğunun

$$L(\gamma)=\int_\gamma \frac{|dz|}{1-\left|z\right|^2}$$

ile tanımlanabileceğini söyler.

1). ve 6). Alıştırmalar, Schwarz Lemmasının aşağıdaki geometrik yorumunu verir:

1). Alıştırma (36) eşitsizliğinin tekrar düzenlenmesiyle, $z\to z_0$ için

$$\frac{|f'(z)|}{1-\left|f(z)\right|^2}\le\frac{1}{1-\left|z\right|^2}$$

elde edilir.

6). Alıştırma $f : D \longrightarrow D$ ye holomorfik bir fonksiyon ve yukarıdaki γ eğrisinin görüntüsü $f(\gamma)$,

$$w(t)=f(z(t)) \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

olsun. Bu halde

$$\begin{aligned}
L\left(f(\gamma)\right) &= \int_\alpha^\beta \frac{|w'(t)|}{1-\left|w(t)\right|^2}\,dt\\
&= \int_\alpha^\beta \frac{|f'(z(t))z'(t)|}{1-\left|f(z(t))\right|^2}\,dt\\
&\le \int_\alpha^\beta \frac{|z'(t)|}{1-\left|z(t)\right|^2}\,dt \qquad \text{(Alıştırma 1) den)}\\
&= L\left(\gamma\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece belirtildiği gibi,

$$L\left(f(\gamma)\right) \leq L\left(\gamma\right)$$

bulunur.