MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu

18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 pg 4 Çözümleri

1 (sayfa 130 daki Problem 3).

1. Yol: $z \to \infty$ iken bu fonksiyonların limitinin olmadığını ispatlamalıyız. Bunu

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \infty$$

fakat

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(w_n)$$

olacak biçimde $\{z_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizileri inşa ederek ispatlayabiliriz.

- $$f(z) = e^z$$

  için

  $$z_n = n, w_n = -n$$

  alırız.

- $$f(z) = \sin z \text{ veya } f(z) = \cos z$$

  için

  $$z_n = 2\pi n, w_n = 2\pi n + 1$$

  alırız.

2. Yol: Tanımdan, her (sabit) $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{z\to 0} z^m f\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0$$

olduğunu ispatlamak zorundayız. Bunu $z_n \to 0$ iken

$$\lim_{z\to 0} z_n^m f\left(\frac{1}{z_n}\right) \neq 0$$

olacak biçimde bir $\{z_n\}$ dizisi seçerek ispatlayabiliriz.

- $$f(z) = e^z$$

  için

  $$z_n = 1/n$$

alırız.

- $$f(z) = \sin z \text{ veya } f(z) = \cos z$$

  için

  $$z_n = \frac{1}{ni}$$

alırız.

3. Yol: Arasınavda, $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de analitik ve ∞ da esaslı olmayan tekil noktaya sahip ise $f(z)$ nin bir polinom olduğu ispatlandı. Bu halde, tüm

$$f_1(z) = e^z, \ f_2(z) = \sin z, \ f_3(z) = \cos z$$

fonksiyonları $\mathbb{C}$ de analitikdir ve hiç biri polinom değildir (Taylor açılımından veya sıfırlarının sayısından) ve bu nedenle ∞ hepsi için esaslı tekil noktasıdır.

2 (sayfa 133 deki Problem 4).

Çözüm: Koşullardan, $h(z)$ fonksiyonu 0 ın bir komşuluğunda analitik ve $h(0) \neq 0$ olmak üzere,

$$f(z) = f(0) + zh(z)$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, h nın sıfırdan farklı ve analitik olduğu küçük bir $B_\varepsilon(0)$ komşuluğu vardır. 142. sayfadaki Sonuç 2 den, $B_\varepsilon(0)$ üzerinde

$$\widetilde{h}(z) = h(z)^{1/n}$$

tek-değerli analitik fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

$$g(z) = z\widetilde{h}(z^n)$$

olsun. $B_\varepsilon(0)$ içinde

$$\begin{aligned} f(z^n) &= f(0) + z^n h(z^n) \\ &= f(0) + g(z)^n \end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı:

$$f'(0) \neq 0$$

koşulundan vazgeçebiliriz. 0 noktası $f(z) - f(0)$ ın daima bir sıfır yeri olduğundan, $h(z)$ fonksiyonu 0 ın bir komşuluğunda analitik ve $h(0) \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) = f(0) + z^m h(z)$$

yazabiliriz ya da

$$f(z) \equiv f(0)$$

dır.

İlk durumda

$$g(z) = z^m \widetilde{h}(z^n)$$

alarak devam edebiliriz, ikinci durum ise aşikardır.

3 (sayfa 148 deki Problem 4).

Çözüm:

$$f(z) = z$$

analitik fonksiyonuna 142 inci sayfadaki Sonuç 2 uygulanırsa, $\log z$ nin tek değerli analitik bir dalı orijini içermeyen herhangi bir basit bağlantılı bölgede tanımlanabilir. Bu nedenle z^α ve z^z nin tek-değerli analitik dalı

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

ve

$$z^z = e^{z \log z}$$

ile tanımlanabilir.