18.112 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar
2008 Güz

18.112 pg 1 Çözümleri

1 (sayfa 11 deki Problem 1).

Çözüm:

$$\begin{aligned}
|a|<1, |b|<1 &\Longrightarrow (1-a\overline{a})\left(1-b\overline{b}\right)<1 \\
&\Longrightarrow 1-a\overline{a}-b\overline{b}+a\overline{a}b\overline{b}>0 \\
&\Longrightarrow 1+a\overline{a}b\overline{b}-a\overline{b}-\overline{a}b>a\overline{a}+b\overline{b}-a\overline{b}-\overline{a}b \\
&\Longrightarrow \left(1-a\overline{b}\right)(1-\overline{a}b)>(a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) \\
&\Longrightarrow \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1.
\end{aligned}$$

2 (sayfa 11 deki Problem 4).

Çözüm:

- Eğer bir çözüm varsa,

$$\begin{aligned}
2|c| &= |z-a|+|z+a| \\
&\geq |(z-a)+(z+a)| \\
&= 2|a|
\end{aligned}$$

olur, yani

$$|c| \geq |a|$$

dır.

Diğer taraftan, eğer

$$|c| \geq |a|$$

ise

$$z_0=\frac{|c|}{|a|}a$$

alınarak, z_0 ın da bir çözüm olduğu kolayca görülebilir. Böylece $z=z_0$ a karşı gelen, $|z|$ nin en büyük değeri $|c|$ dir.

- Esas eşitsizlik ve sayfa 8 deki (8) formülünden,

$$\begin{aligned} 4|c|^2 &= (|z+a|+|z-a|)^2 \\ &\leq 2\left(|z+a|^2+|z-a|^2\right) \\ &= 4\left(|z|^2+|a|^2\right) \\ &\Rightarrow |z| \geq \sqrt{|c|^2-|a|^2} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$z = i\frac{\sqrt{|c|^2-|a|^2}}{|a|}a$$

alınabilir.

Dikkat! Geometrik olarak,

$$|z+a|+|z-a| = 2|c|$$

denklemi, uzun ekseni $|c|$ ve odağı a olan elipsi gösterir. Kısa ekseni de

$$\sqrt{|c|^2-|a|^2}$$

dir ve buradan

$$\sqrt{|c|^2-|a|^2} \leq |z| \leq |c|$$

bulunur.

3 (sayfa 17 deki Problem 1).

Çözüm:

$$az+b\overline{z}+c=0$$

denkleminin bir doğruyu gösterdiğini varsayalım. Bu durumda z_0, z_1 gibi iki farklı çözümü vardır. Buradan

$$\begin{aligned} az_0+b\overline{z_0}+c &= 0, \quad az_1+b\overline{z_1}+c=0 \\ &\Longrightarrow a(z_0-z_1) = b(\overline{z_1}-\overline{z_0}) \\ &\Longrightarrow |a| = |b| \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$a \neq 0$$

ve

$$b = ae^{i\theta}$$

olacak biçimde bir θ vardır. Bu halde,

$$
\begin{aligned}
& az + b\overline{z} + c = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & az + ae^{i\theta}\overline{z} + c = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & z + e^{i\theta}\overline{z} + c/a = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{-i\frac{\theta}{2}}z + \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}z} + e^{-i\frac{\theta}{2}}c/a = 0
\end{aligned}
$$

olur. Bu denklemin çözümü ancak ve ancak

$$e^{-i\frac{\theta}{2}}c/a \in \mathbb{R}$$

ise vardır. Bu nedenle, yukarıdaki denklem

$$2\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}z\right) = -e^{-i\frac{\theta}{2}}c/a$$

olması durumunda bir doğruyu temsil eder.

Dikkat edilirse

$$
\begin{aligned}
& e^{-i\frac{\theta}{2}}c/a \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{-i\frac{\theta}{2}}c/a = \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}c/a} \\
\Longleftrightarrow \quad & c/\left(ae^{i\theta}\right) = \overline{c/a} \\
\Longleftrightarrow \quad & c/b = \overline{c/a}
\end{aligned}
$$

dir. Bu nedenle a, b, c arasındaki ilişki

$$|a| = |b| \quad \text{ve} \quad c/b = \overline{c/a}$$

ile verilir.

4 (sayfa 17 deki Problem 5). ($|a| \neq 1$ varsaymalıyız)

Çözüm: P, Q düzlemde a ve $1/\overline{a}$ ye karşı gelen noktalar olsun.

$$\frac{1}{\overline{a}} = \frac{a}{|a|^2}$$

olduğundan O, P ve Q nun aynı doğru üzerinde olduğunu biliyoruz. Varsayalım ki çember ile birim çember R, S noktalarında kesişsin (İki noktada kesişirler!). Bu halde

$$\left|\overrightarrow{OR}\right|^2 = 1 = |a|\,|1/\overline{a}| = \left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|$$

olur. Elemanter düzlem geometriden, $\overrightarrow{OR}$ ışını P, Q dan geçen çembere teğettir, yani yarıçaplar kesim noktasında diktir. Bu nedenle de iki çember dik kesişir.