

## Ders 8: Kütle ve Eylemsizlik Momenti

Galileo, Kepler ve Newton gezegen kütlelerin dinamiğini ilişkin temel kuramları ortaya koydukları 17. yüzyıla kadar gezegenlerin kütleleri bilinmemekteydi. Newton, 1686'da Kepler'in gezegen yörüngelerine ilişkin yasalarını ve kendi yerçekimi, kuvvet ve yerçekimi ivmesi yasalarını kullanarak, Jüpiter'in kütlelerinin Yeryuvarı'nın kütlelerinden yaklaşık olarak 312 kez daha fazla olduğunu hesapladı (G bilinmemekteydi, bu nedenle her bir kütle için mutlak değerini hesaplamak mümkün değildi). Modern gözlemler bu hesaplamaların  $\leq 3\%$ 'lük hata payıyla doğru olduğunu göstermektedir.

Gezegenlerin boyutlarının saptanması kütleye nazaran daha zordur. Gezegenlerin boyutları ilk olarak, yıldızların gezegenler tarafından kapatılması (karartılması) ve daha sonra uzay mekiği verileri, uzay mekiği ile radar taraması ve Doppler izlemesi ile tahmin edilmiştir. Gezegen kütlesi ve yarıçaptan, gezegenlerin ortalama yoğunlukları kolaylıkla hesaplanmaktadır. Ancak, yarıçapın işlevi olarak kütle için dağılımı hemen hemen bütünüyle belirsizdir.

Gezegenlerdeki radyal kütle dağılımına ilişkin ilk tahminler, kendi eksenleri etrafında dönen gezegenin eylemsizlik momentinden yapılmıştır. Tipik olarak, eylemsizlik momentinin hesaplanması, gezegenlerin küresel olmadığı ve ekvatorunda dönme ivmeden dolayı dışa pörtlmesi olgusuna dayanmaktadır. Ayrıca, gezegenlerin dönme eksenleri, gezegenlerin güneş etrafında (uydu olduklarında bir gezegen etrafında) dönerken oluşturdukları düzleme dik değildir. Bu, dönen gezegenin küresel olmayan simetrik kısmında bir dönme momenti (torque) olduğu ve dönme eksenleri bir jiroskop gibi yalpaladığı anlamına gelmektedir. Bir jiroskop için, dönme ekseninin devinim hızı gezegen kütlelerinin eylemsizlik momentine bağlıdır. Bunun sonucu olarak devinim hızı, gezegenin eylemsizlik momentinden hesaplanabilir. Eylemsizlik momenti, bir gezegenin yerçekimi alanının quadrapol momentinden hesaplanabilir. Ancak böyle veriler yalnızca Yeryuvarı, Ay, Mars ve Venüs için mevcuttur.

Gezegenin kütlesi ile birlikte eylemsizlik momenti, bir gezegenin merkezine doğru kütlelerin nasıl toplanmış olduğunu ve özellikle çekirdek boyutunu ve/veya yoğunluğunu hesaplamak için faydalıdır. Tekdüze yoğunluklu bir kürenin eylemsizlik momenti  $I = \frac{2}{5}MR^2$ 'dir. Burada M, kürenin kütlesi, R ise yarıçapıdır. Eğer eylemsizlik momenti  $\frac{2}{5}MR^2$ 'den daha küçükse, o zaman gezegen çekirdeğe doğru, yüzeye doğru olduğundan daha yoğundur.

Eylemsizlik momentini, kütlede ziyade yoğunluk cinsinden ifade edebiliriz:

$$I = \left(\frac{8}{15}\right)\pi\rho R^5$$

Eğer tekdüze yoğunluklu bir küre yerine,  $\rho_x$  yoğunluklu ve  $r_x$  yarıçaplı bir küresel "çekirdek" ve  $\rho_m$  tekdüze yoğunluklu bir mantomuz varsa, eylemsizlik momenti ve kütle sırasıyla

$$I = \frac{8\pi}{15} \rho_m R^5 + \frac{8\pi}{15} (\rho_x - \rho_m) r_x^5$$

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_m R^3 + \frac{4\pi}{3} (\rho_x - \rho_m) r_x^3$$

dır.

Bir gezegenin eylemsizlik momenti birimsiz bir sayı olarak ifade etmek tipiktir:

$$L = \frac{I}{MR^2}$$

$$L = \frac{I}{MR^2} = \left( \frac{8\pi}{15} \right) \left[ \frac{\rho_m R^5 + (\rho_x - \rho_m) r_x^5}{MR^2} \right]$$

Bu denklem uniform bir küre için ( $r_x=0$  ya da  $r_x=R$ ),  $L=2/5$  haline gelir. Eğer bir gezegen içindeki ana yoğunluk değişimi, daha yoğun bir çekirdek ve daha az yoğun mantodan kaynaklanıyorsa, o zaman  $L$ , 0.4'den daha küçük olacaktır. Eğer hem manto hem de çekirdek yoğunlukları tahmin edilebiliyorsa, gezegen çekirdeğinin yaklaşık yarıçapı, kütle ve gezegenin eylemsizlik momentinden saptanabilir.

$L$ 'yi aşağıdaki gibi yazmak bazen faydalı olabilir:

$$L = \frac{I}{MR^2} = \left( \frac{2}{5R^2} \right) \frac{\rho_m R^5 + (\rho_x - \rho_m) r_x^5}{\rho_m R^3 + (\rho_x - \rho_m) r_x^3}$$

ya da

$$L = \frac{I}{MR^2} = \left( \frac{2}{5} \right) \left[ \frac{1 + \left( \frac{\rho_x}{\rho_m} - 1 \right) (r_x/R)^5}{1 + \left( \frac{\rho_x}{\rho_m} - 1 \right) (r_x/R)^3} \right]$$

Eğer bir gezegenin kütleini biliyorsak, o zaman  $L$ 'nin minimum değeri,  $L$ 'nin  $r_x$  göre türevini sıfıra eşitlenerek saptanan bir  $r_x$  değeri için olacaktır.

	Yarıçap (km)	Ortalama yoğunluk (kg/m <sup>3</sup> )	$L$
Yeryuvarı	6378	5515	.3308
Venüs	6052	5243	.33
Mars	3396	3933	.376
Merkür	2440	5427	.33
Ay	1738	3350	.394

Gezegenele ait bu ve öteki eğlenceli gerçekleri aşağıdaki internet adresinde bulabilirsiniz:

<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>