Ders 27-28: Gravite Anomalileri

M kütleli bir küre için, kürenin dışındaki yerçekimsel potensiyel alan (Vg),

$$V_g = -\frac{MG}{r}$$

Burada G evresel yerçekimi sabitesidir (6.67300 x 10^{-11} $m^3kg^{-1}s^{-2}$) ve r ise kürenin merkezinden olan mesafedir. Yerçekimi alanı ile potansiyel alanla, alanın kürenin dışında ölçülmesi koşuluyla, şu şekilde bağlantılıdır:

$$g = -\nabla\Delta_g = -\frac{MG}{r^2}\check{r}$$

Gezegenlerin Referans Yerçekimi Alanı

Gezegenlerin küre olmamaları, dönme eksenleri etraflarında dönmeden ötürü hafifçe yassılaşmış sferoyid olmalarından ötürü, yerçekimi alanı tamamıyla bir küreninki gibi değildir. Yerçekimi alanının büyüklüğü, yassılaşmış bir sferoyid için enlemin işareti ile orantılı olan terimlere sahiptir:

$$g = \frac{MG}{r^2} + Asin^2\lambda + Bsin^4\lambda$$

Bu, "referans yerçekimi alanı" olarak adlandırılmaktadır. Kabuk veya manto içerisindeki kütle anomalilerinden kaynaklanan graviteye bakmak istiyorsanız, ilk önce gözlenen yerçekimi alanından referans yerçekimi alanını çıkartmamız gereklidir. Bunun amacı, kütle anomalilerinden veya kütle anomalilerine neden olan dinamik süreçlerden arta kalan anomalileri bulmaktır. Yeryuvarı'nda, g satıhta 9.81 m/sn^2'dir. Ancak bizim baktığımız anomaliler bundan 4 ya da 5 onun katı kadar küçüktür. Genel olarak biz gravite anomalilerini (yerçekimi anomalilerini) mgal birimi cinsinden ölçmekteyiz. 1 mgal = 10^{-5} m/sn^2'dir.

Serbest Hava (Yükseklik) Düzletmeleri:

En uygun referans yerçekimi alanının çıkartılmış olduğu bir gezegen yerçekimi alanımız olduğunu varsayalım. Şimdi arkta kalanı yorumlamak istiyoruz. Üzerinde kafa yormamız gereken diğer bir konu, yerçekimi gözlemlerimizin ilgili gezegen için en iyi uyan yassılaşmış bir sferoyide göre muhtemelen değişik yüksekliklerde yapılmış olduğu olgusudur. Bu (i) uzay mekiğimizin yörüngesinin zamanla değişmesinden veya (ii) ölçümlerin temel seviyede yaparsak topografyadan ötürü ortaya çıkmaktadır. Ancak biz ölçüm yüksekliği dolayısıyla değişen ölçümleri kütle anomalileri dolayısıyla değişen ölçümlerle karıştırmak istemiyoruz.

Yalınlık için, bu andan itibaren, gezegenimizin tam bir küre olduğunu ve referans yerçekimi alanının yersel olarak MG/r^2 olarak tarif edilebileceğini varsayacağız. Bu formülde r gezegenin kütle merkezinden ölçüm noktasına olan mesafedir. Gezegenin yarıçapının R ve ölçümün en iyi uyan yassılaşmış sferoyidin h m yüksekliğinde yapıldığını farz edelim. Ayrıca h'nin R'ye nazaran küçük olduğunu varsayalım. h yüksekliğinde ölçülen yerçekimi alanı şu olacaktır:

$$g_h = \frac{MG}{r^2} = \frac{MG}{(R+h)^2} = \frac{MG}{R^2(1+\frac{h}{R^2})} \approx \frac{MG(1-\frac{2h}{R})}{R^2} = g_s\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

g_s gezegenin (ya da yassılaşmış bir sferoyidin) yüzeyinde referans yerçekimi alanıdır. Yükseklikle yerçekimi alanında beklenen değişim ise:

$$g_h = g_s - \left(\frac{2h}{R}g_s\right)$$

'dir.

Parantez içindeki terim "serbest hava düzeltmesi" olarak adlandırılmaktadır. Bu bir yükseklik düzeltmesi olup, gravite ölçümlerinin deniz seviyesinde yapılmış olsaydı (ya da uzayda gezegenin merkezinden R mesafeli yassılaşmış bir sferoyide) alacağı değerlere indirgenmesidir. Bu düzeltmeyi değerlendirmek kolaydır. Sözgelimi, Yeryuvarı için R = 6400 km, g_0=9.81 m/s^2. Bu bize $(2g_0/R)=3.06*10^{-6}$ s^{-2} = 0.306 mgal/m veya 306 mgal/km olacaktır.

Kütle Anomalileri ve Gravite Anomalileri

Şimdi referans yerçekimi alanı ve yükseklik düzeltmelerini ele aldığımızdan, gravite anomalilerini hesaplamaya başlayabiliriz. Yalınlık için, bütün kütle anomalilerinin y yönünde değişkensiz olması için, her şeyi iki boyutta ve Kartezyen koordinatlarında yapacağız. Şimdi bir $\Delta\rho$ yoğunluklu dx_0 genişlikli ve dz_o yükseklikli ve çevreleyen kabuk ya da mantolu bir çizgi anomalimiz olsun. Şimdi anomalinin b derinliğinde ve ölçüm yaptığımız noktanın tam altında olduğunu varsayalım.

Derste gösterdiğimiz gibi, bir yerçekimi alanının mutlak değerini ölçtüğümüzde, kütle anomalisinin yaratmış olduğu yerçekimi alanının yalnızca düşey bileşenini ölçmekteyiz. (Çünkü kütle anomali alanı, toplam gezegen alanından çok küçük olacaktır ve bizim gravimetrelerimiz yalnızca alanın büyüklüğünü ölçmektedir).

Şimdi hat anomalisinin yalnızca küçük bir parçasını, (x_0, y_0, -b) konumlu ve dy_0 uzunluklu düşünelim: Bundan yola çıkarak (x, y, 0) konumunda anomali alanının düşey bileşenini hesaplayalım. Bu kolaydır:

$$\Delta g_z = \left(\frac{G\Delta\rho dx_0 dy_0 dz_0}{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+b^2}\right)\left(\frac{b}{((x_0-x)^2+(y_0-y)^2+b^2)^{1/2}}\right)$$

Parantez içindeki ilk terim, gözlem noktasındaki anomali alanının toplam büyüklüğüdür. Parantez içindeki ikinci terim ise, gözlem noktasından kütle anomalisine olan açının sinüsüdür. Toplam hat yükünden kaynaklanan gravite anomalisini, bu ifadeyi y_0'a göre entegralini alarak ve hattın uçlarının ±sonsuza götürerek gravite anomalisini bulabiliriz. Böylece:

$$\Delta g_{hat} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{bG\Delta\rho dx_0 dz_0}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + b^2)^{3/2}} dy_0$$

$$\Delta g_{hat} = \left[\frac{bG\Delta\rho dx_0 dz_0}{(x_0 - x)^2 + b^2}\right] \frac{y_0}{((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + b^2)^{1/2}}\Bigg|_{y_0=-\infty}^{y_0=\infty}$$

ya da

$$\Delta g_{hat} = \frac{2bG\Delta\rho dx_0 dz_0}{((x_0 - x)^2 + b^2)}$$

Bu ifade genel olarak, bir b derinliğinde herhangi bir kütle dağılımından ötürü öngörülmüş gravite anomalilerini hesaplamak için faydalıdır. Eğer kütle anomalilerinin derinlik aralığı b'den son derece farklı değilse, örnek olarak, b değeri çıvarında salınım sunan Moho değişimlerini (kabuk-manto sınırı), daha sonra bütün kütleyi bir b derinliğine yassılaştırmaktayız. Eğer değişim bunun için çok büyük ise, yapacağımız işlem biraz daha karışık hale gelmektedir. Ancak şu an için, bütün anormal kütlenin b derinliğindeki bir yüzey üzerinde yoğunlaşmış olduğunu kabulleneceğiz.

$x_0=x_1$'den $x_0=x_2$'ye uzanan dz_o kalınlıklı bir kütle şeridi için çözmek için faydalı yük dağılımı: Bu entegral alma ile kolayca çözülebilir:

$$\Delta g_{şerit} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2bG\Delta\rho dz_0}{(x_0 - x)^2 + b^2} dx_0$$

ya da

$$\Delta g_{şerit} = 2G\Delta\rho dz_0 \left[tan^{-1}\left(\frac{(x_2 - x}{b}\right) - tan^{-1}\left(\frac{x_1 - x}{b}\right)\right]$$

Eğer yük çok dar ise, yani (x_1-x_2) b'ye nazaran küçük ise, o zaman yüzeydeki gravite anomalisi bir hat yükü gibi görünecektir:

$$\Delta g = \frac{2bG\Delta\rho(x_2 - x_1)dz_0}{\left(\left[\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) - x\right]^2 + b^2\right)}$$

Eğer şerit derinliğe nazaran çok daha geniş ise, ve gözlemci anomalinin üzerinde ve kenarlardan uzakta ise, o zaman kütle anomalisi bir sonsuz malzeme plakası gibi görünecektir:

$$\Delta g_{plaka} = 2\pi G \Delta\rho dz$$

Eğer şerit derinliğe göre çok geniş ise, ve gözlemci bunu gravitede görmek için bir kenara yeterince yakın ise, diyelim ki x_1'de

$$\Delta g_{1/2plaka} = G\Delta\rho dz_0 \left[\pi + 2tan^{-1}\left(\frac{(x-x_1}{b}\right)\right] \text{ dir.}$$

Şimdi uzaydan veya yüzeyden ölçülen gravite ile derindeki kütle anomalilerini ne kadar iyi şekilde görebileceğimize ilişkin soru yöneltmek için yeterince bilgiye sahibiz. İlk olarak uzaydan yapılmış ölçümlere geçmeden bir gezegenin yüzeyinde ölçülmüş gravite hakkında düşünmeye başlayalım: Birşerit kütle ile çizgisel kütleyi birbirinden, her iki durumda da kütle anomalisinin aynı olması ve şeridin merkezi ile çizginin merkezinin çakışmış olduğunu varsayarak, ne kadar iyi ayırabiliriz? Hem kütle hem de şerit kütlesinin $x_0=0$'da merkezlenmiş olduğunu ve şeridin bir a yarım kalınlığa sahip olduğu ve bunun sonucunda bir profilde toplam kütlesel anomalinin ($2adz_0\Delta\rho$) olduğunu varsayalım:

Çizgi (hat) kütlesi için gravite anomalisi:

$$\Delta g_{hat} = \frac{4baG\Delta\rho dz_0}{(x^2+b^2)}$$

Şerit için gravite anomalisi

$$\Delta g_{şerit} = 2G\Delta\rho dz_0 \left[tan^{-1}\left(\frac{x+a}{b}\right) - tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)\right] \text{ ya da}$$

$$\Delta g_{şerit} = 2G\Delta\rho dz_0 \left[tan^{-1}\left(\frac{x}{b}+\frac{a}{b}\right) - tan^{-1}\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\right)\right] \text{ dir.}$$