Ders 18: Soğuyan Gezegenler

Yukarıda konvektif ısı akısı için türetmiş olduğumuz ifadelerden, bir gezegenin mantosundaki konvektif döngü dolayısıyla ne kadar hızlı soğuyacağını hesaplayabiliriz. Dört milyar yıllık sürede iletkenlikle soğumanın birkaç yüz km'den daha fazla derine nüfuz edemeyeceğini görmüştük. Bundan ötürü, gezegenlerin soğumasını denetleyen ana süreç konveksiyon olmalıdır.

Manto malzemeleri için, Rayleigh sayısını ve ısı akışı ifadesini sunan viskozite (ağdalılık) sıkıca sıcaklığa bağımlıdır. Bunu, soğumayı hesaplarken dikkate almak zorundayız. Ağdalılığın (viskozitenin) sıcaklık bağımlılığına şu şekilde bir yaklaşabiliriz (Bu matematiksel olarak izlenebilir bir tarzda faydalı bir yaklaşımdır):

$$\mu(T) = \mu_0 e^{\gamma(T_0 - T)}$$

Burada T mantonun ortasındaki sıcaklıktır. γ, 100°C'lik sıcaklık artışı ağdalılıkta onluk katlarda bir düşüşe neden olacak şekilde saptanmalıdır. Böylece, 0.05'lik veya civarındaki bir değer makul (akla yatkın) olsun. Eğer mantoda çizgisel termal bir gradyan varsa, o zaman T mantonun da ortalama sıcaklığıdır.

Şimdi, mantonun zamanla sıcaklık değişimini konvektif ısı akısı ile ilişkilendiren bir denklemi yazmamız gereklidir. d yükseklikli, A yüzey alanlı ve V hacimli bir düşey malzeme sütünü düşünelim. O zaman,

$$q(t) = -\left(\frac{1}{A}\right)\frac{\partial Q}{\partial t} + Q_r d = -\left(\frac{\rho C_p V}{A}\right)\frac{\partial T}{\partial t} + Q_r d$$

Q_r, birim hacme düşen ısı üretim hızıdır. d ise konveksiyona uğrayan katman kalınlığıdır. Çok doğru olmasa da yalınlık için, üretilen bütün ısının konveksiyona uğrayan katmanın tabanına eklenmiş oluğunu varsayacağız ve unu iç ısı üretimine uydurmamız gerekecektir. Yüzey alanı ve hacim terimlerinden kurtulmak için yalınlaştırma yapalım:

$$q(t) = -\rho C_p d\frac{\partial T}{\partial t} + Q_r d$$

Şimdi bu ifadeyi konvektif ısı akısı terimine denkleştirelim:

$$q(t) = \beta\frac{d^2\rho^2\Delta T^2 g\alpha C_p}{\mu(T)} = -\rho C_p d\frac{\partial T}{\partial t} + Q_r R$$

Bu ifade aşağıdaki ifadeyle aynıdır:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta\frac{d\rho\Delta T^2 g\alpha}{\mu(T)} + \frac{Q_r R}{\rho C_p d}$$

Şimdi ΔT'nin sabit olması kabullenildiğinde, çözümü kolay olan bir ifade elde etmek için, $\mu(T)$ ifadesini bu denklemde yerine koyalım.

(ΔT'nin mantonun tabanı ile tavanı arasındaki süperadiyabatik sıcaklık farklılığı olduğunu hatırlayınız). Manto malzemeleri için, Rayleigh sayısı ve ısı akısı ifadesini gösteren viskozite sıkıca sıcaklığa bağımlıdır ve bunu soğumayı hesaplarken dikkate almalıyız. Viskozitenin (ağdalılığın) sıcaklık bağımlılığına bir yaklaşımda bulunabiliriz (Bu matematiksel olarak izlenebilir bir tarzda faydalı bir yaklaşımdır).

$$\mu(T) = \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}$$

γ, 100°C'lik sıcaklık artışı ağdalılıkta onluk katlarda bir düşüşe neden olacak şekilde saptanmalıdır. Böylece, 0.05'lik veya civarındaki bir değer makul (akla yatkın) olsun. O zaman yerleştirmeyi yapalım:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta \frac{d\rho \Delta T^2 g\alpha}{\mu_0 e^{\gamma(T_0-T)}} + \frac{Q_r R}{\rho C_p d}$$

Burada T'nin mantonun ortalama sıcaklık, ΔT'nin süperadiyabatik sıcaklık olduğuna dikkate edelim. Eğer mantoda çizgisel bir ısı gradyanı mevcut ise, o zaman T mantodan aşağıya doğru yarı yoldaki sıcaklıktır. Buradan da, mantonun kalınlığını ve diğer parametreleri bilinmesi halinde, bir gezegen mantosunun ne kadar hızlı soğuyacağını hesaplayabiliriz. Bu diferansiyel denklem aşağıdaki adımlarda yeniden yazılıp ve entegre edilirse kolayca çözülebilir:

$$\rho C_p \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)} \frac{\partial T}{\partial t} = -\beta d \rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha + Q_r (\frac{R}{d}) \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}$$

$$\left[\frac{d\rho C_p \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}}{\beta d^2 \rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}}\right] \frac{\partial T}{\partial t} = -1$$

Entegralini alalım:

$$\left(\frac{\rho C_p}{\gamma Q_r}\right) ln\left[\beta d^2 \rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}\right] = -t + sabit\ t$$

t=0 ve $T=T_{in}$ ihtiyaç duyarak, entegral sabitesi için çözelim:

$$\left(\frac{\rho C_p}{\gamma Q_r}\right) ln\left[\frac{\beta d^2 \rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}}{\beta d^2 \rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R \mu_0 e^{-\gamma(T_m-T_0)}}\right] = -t$$

Bunu sıcaklıktan ziyade zaman fonksiyonu olarak yazmak daha yerinde olurdu. Bunu birçok adımda yeniden yazalım:

$$\left[\frac{\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R\mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}}{\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R\mu_0 e^{-\gamma(T_{in}-T_0)}}\right] = exp\left(\frac{-t\gamma Q_r}{\rho C_p}\right)$$

$$\left(\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R\mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}\right) = \left(\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R\mu_o e^{-\gamma(T_m-T_o}\right) exp\left(\frac{-t\gamma Q_r}{\rho C_p}\right)$$

$$\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - \left(\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha - Q_r R\mu_0 e^{-\gamma(T_m-T_0)}\right) exp\left(\frac{-t\gamma Q_r}{\rho C_p}\right) = Q_r R\mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}$$

T_{in}'i yeterince büyük bıraktığımızda, sol taraftaki üstel terim çok küçük olmakta ve sonuç olarak ihmal edilebilir duruma gelmektedir:

$$\left(\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha\right)\left[1 - exp\left(\frac{-t\gamma Q_r}{\rho C_p}\right)\right] = Q_r R\mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}$$

$$ln\left\{\left(\frac{\beta d^2 C_p \Delta T^2 g\alpha}{Q_r R\mu_0}\right)\left[1 - \exp\left(\frac{-t\gamma Q_r}{\rho C_p}\right)\right]\right\} = -\gamma(T - T_0)$$

$$ln\left(\frac{\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha}{Q_r R\mu_0}\right) - ln\left[1 - exp\left(\frac{-t\gamma Q_r}{\rho C_p}\right)\right] = -\gamma(T - T_0)$$

Son olarak, daha uygun biçimde yazalım:

$$ln\left(\frac{Q_r R\mu_0}{\beta d^2\rho^2 C_p \Delta T^2 g\alpha}\right) - ln\left[1 - exp\left(\frac{-t\gamma Q_r}{\rho C_p}\right)\right] = \gamma(T - T_0)$$

Bunun nasıl göründüğünün ilk tahmini yapmak için, Yeryuvarı ile aynı yoğunluğa sahip fakat farklı yarıçaplı gezegenlere baktığımızı varsayalım. Bu durumda g yalnızca gezegen yarıçapı ile orantılı olarak küçülecektir. Yoğunluk (ρ) ve ısısal iletkenlik (α) gezegen boyutundan bağımsız olacaklardır.

$g = 10\ m/s^2 * R/R_e$

$Q_R = 0.01\ \mu W/m^3 = 10^{-8}\ W/m^3$

Ƙ$= 10^{-6}\ m^2/s$

ρ= 4000 kg/m^3

C_p = 1260 J/kgK

K= 5 W/mK

α= 10^{-5} K^{-1}

β=0.01

γ=0.05

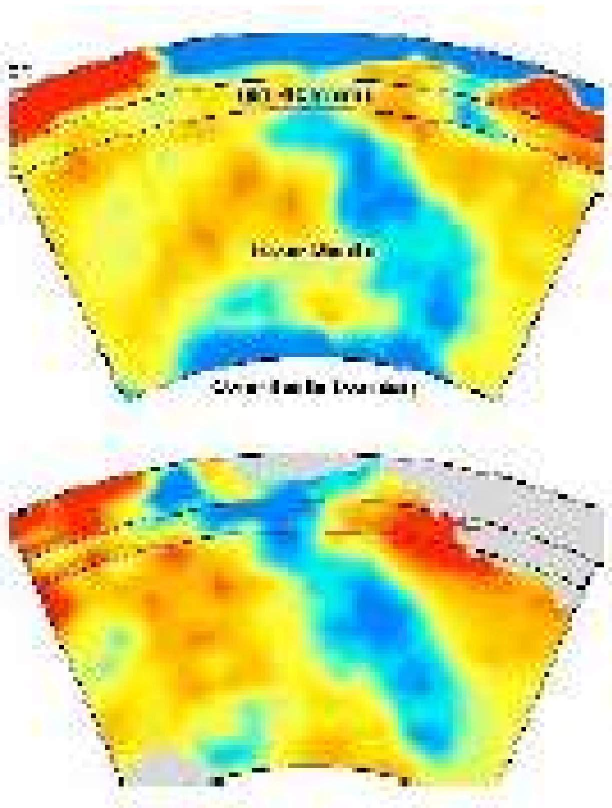
μ_0=10^{22} Pa s

T_0= 1300 °C

ΔT=10 °C

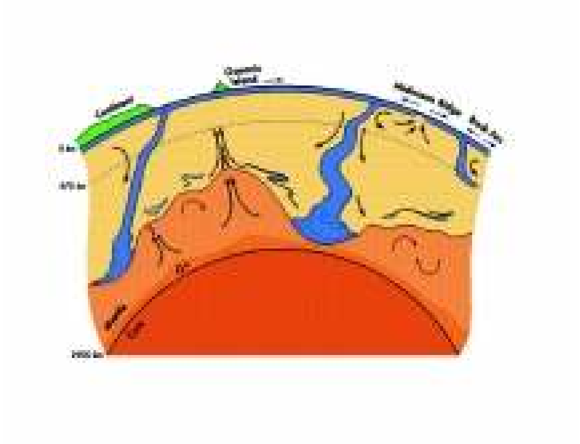
R’den küçük olması koşuluyla konveksiyona uğrayan katman kalınlığı (d) için herhangi bir değer seçebiliriz.

Yeryuvarında dalan plaka - Konveksiyonun sisteminin bir parçası:



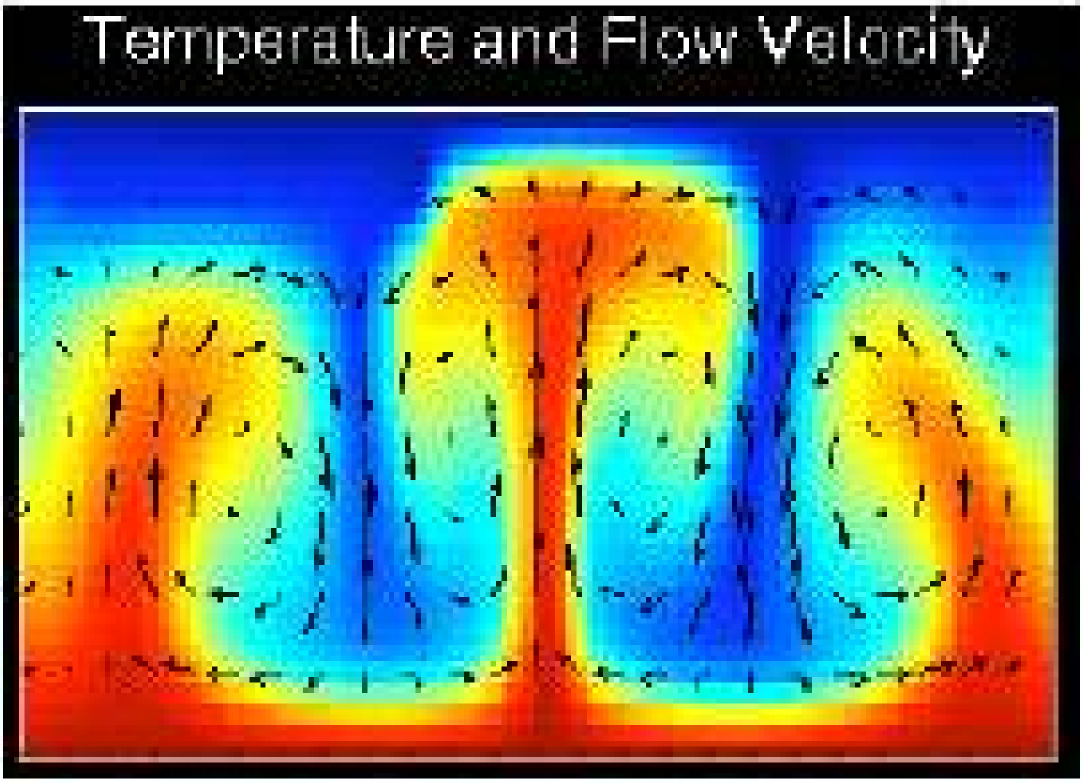
Prof. Robert van der Hilst (MIT)’nin inceliği ile, izinle kullanılmaktadır.

Bütün gezegenler için:



http://www-geology.ucdavis.edu/~kellogg/mantle.jpg

Kaliforniya Üniversitesinden Louise H. Kellog'un inceliği ile, izinle kullanılmaktadır.



MIT'den Prof. Bradford Hager'in nezaketi ile, izinle kullanılmaktadır.