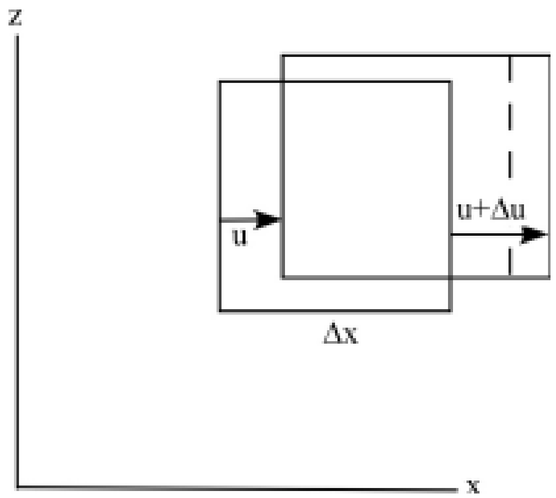
Ders 10: Elastik Gerilim-Deformasyon Bağlantısı

Elastik malzemelerde gerilim, gerilimin deformasyon hızı ile bağlantılı olduğu ağdalı (viskoz) malzemelerin aksine, deformasyonla çizgisel olarak bağlantılıdır.

Deformasyon nedir?

Kenar uzunlukları Δx, Δy, Δz (hepsi birbirine eşit) olan bir küpü tasavvur edelim. Bu küpün bir (u, v, w) miktarında ötelenmiş olduğunu ve aynı zamanda yalnızca x yönünde ve Δu miktarında gerilmiş olduğunu varsayalım.



Normal deformasyonlar, uzunluktaki değişimin başlangıçtaki uzunluğa bölümü olarak tanımlanmaktadır. Dolayısıyla, burada x yönündeki normal deformasyon (ε_{xx}):

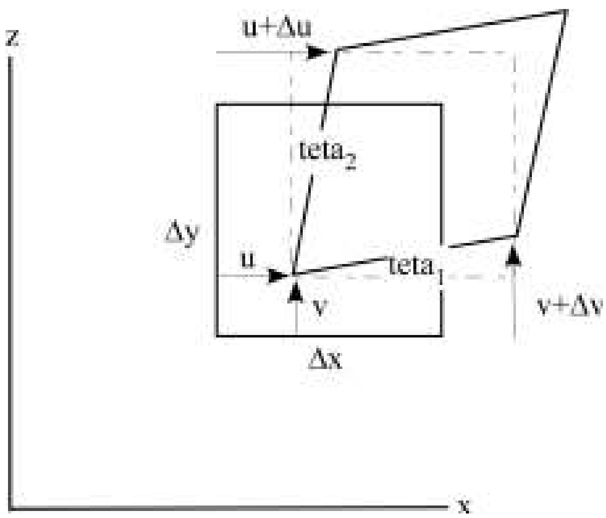
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Benzer şekilde, y yönündeki normal deformasyon:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Eğer normal deformasyon pozitif ise, malzeme o yönde uzuyor (çekiliyor), negatif ise malzeme o yönde kısalıyordur.

Makaslama deformasyonları, başlangıçta dik açılı köşelere sahip olan bir kutunun dik açılı olmayan köşelere sahip bir şekle dönüşüm derecesini ölçer. Başlangıçta kenar uzunlukları ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) olan aynı kutuyu düşünelim:



Makaslama deformasyonu, (ε_{xy}= ε_{yx}), θ_1 ve θ_2 açılarının toplamının 2'ye bölümü olarak tanımlanmaktadır. Bizim burada düşünmüş olduğumuz küçük deformasyonlar için:

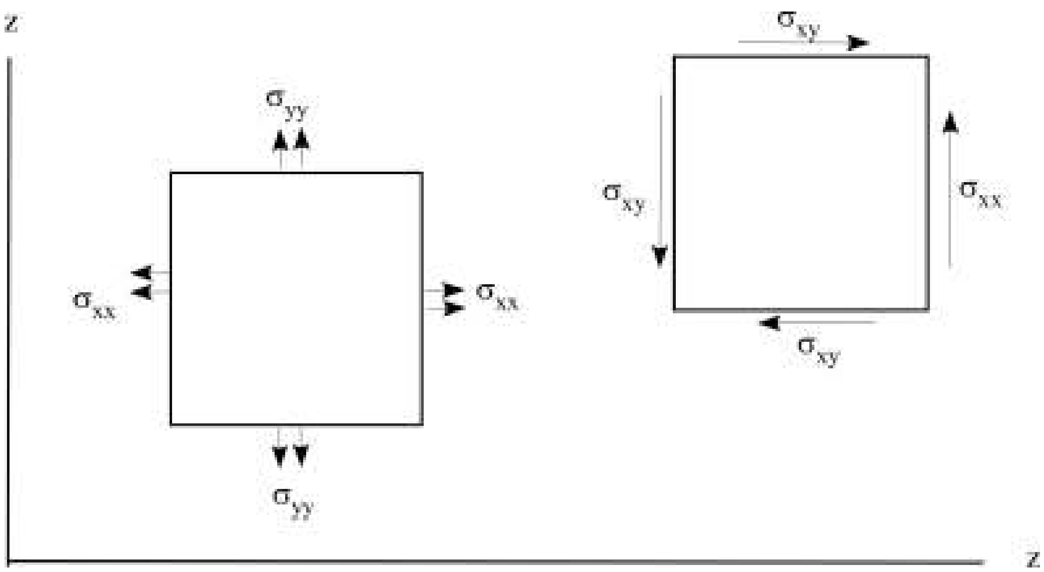
$\theta_1=\tan(\theta_1)=\Delta u/\Delta y$ ve $\theta_2=\tan(\theta_2)=\Delta v/\Delta x$, o zaman:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Elbette, z boyutunu içeren normal deformasyonlar ve kıyaslanabilir makaslama deformasyonları vardır. Ancak biz burada kendimizi x-y düzleminde iki boyutla sınırlandıracağız. Fizik dersinizden, bir kaynak için *Hooke Yasası*'nı hatırlayalım.

$$F = -kx$$

Yeryuvarı hakkında düşünürken de aynı ilişkiyi kullanacağız. Ancak burada birim alana etki eden kuvveti (gerilim) ve kuvvet ve ötelemeden ziyade deformasyonu tasavvur edeceğiz. İlk olarak normal ve makaslama gerilimlerini tanımlamalıyız:



Yukarda ki diyagram deforme olan bir ortam içerisindeki ufak bir küpe etki eden normal ve makaslama gerilimlerini göstermektedir. Normal gerilim, σ_{xx}, gösterildiği gibi x eksenine dik olan düzleme etki eden x yönündeki bir kuvvete karşılık gelen gerilim (dışa doğru pozitif) olarak tanımlanmaktadır. Aynı durum σ_{yy} için de geçerlidir. Makaslama gerilimi, σ_{xy}, y eksenine dik olan bir düzeleme etki eden x yönündeki kuvvete karşılık gelen gerilim olarak tanımlanmaktadır. σ_{yx} bunun tam tersidir. Buna rağmen, σ_{xy} ve σ_{yz} olmalıdır, aksi takdirde küp dönmeli hızlanmaya uğrayacaktır. Bunun ötürü, her iki makaslama gerilimini σ_{xy} olarak yazmalıyız.

Şimdi, elastik bir malzemedeki yer değiştirme ve kuvvet arasında bağlantıyı kuran Hooke Yasası'ndan istifade etmeliyiz. Ancak burada gerilim ile deformasyonu ilişkilendiren iki boyutlu sürümünü kullanacağız.

$$\sigma_{xx} = a_1\varepsilon_{xx} + \alpha_2\varepsilon_{xy} + \alpha_3\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{xy} = b_1\varepsilon_{xx} + b_2\varepsilon_{xy} + b_3\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{yy} = c_1\varepsilon_{xx} + c_2\varepsilon_{xy} + c_3\varepsilon_{yy}$$

Burada 9 orantılılık sabitesi vardır. Biz bunlardan iki tanesi hariç olmak üzere 7'sinden bu ifadeyi X-Y eksenlerinin döndürülmesinde geçerli olmasını gerektirerek kurtulabiliriz: erek gerçekleşmesi suretiyle kurtulabiliriz. Bu ifade, eğer yalnızca bir doğrultuda tutulursa en azından izotropik bir malzeme için faydalı olmaz. Bu nedenle bir eksen etrafında 90˚C'lik dönme dikkate alınırsa, σ_{xx} ve ε_{xx} arasındaki orantılılık sabitesinin, σ_{yy} ve ε_{yy} arasında olduğu gibi aynı olmak zorunda olduğu açıktır. Böylece ifadeleri biraz basitleştirebiliriz:

$$\sigma_{xx} = a_1\varepsilon_{xx} + \alpha_2\varepsilon_{xy} + \alpha_3\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{xy} = b_1\varepsilon_{xx} + b_2\varepsilon_{xy} + b_3\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{yy} = a_1\varepsilon_{xx} + c_2\varepsilon_{xy} + a_3\varepsilon_{yy}$$

Yalnızca iki bağımsız terimle, orantılılık sabitelerin çoğu birbirleriyle bağlantılı ise, isteğe bağlı olarak bir θ açısında bizim eksenlerini çevirirsek, deformasyonla gerilim arasındaki bağıntının dönme altında özdeş olduğunu göstermek biraz karışık olsa da kolaydır. Bu iki terim, λ ve μ, genel olarak Lame katsayıları olarak bilinmektedir.

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{yy}$$

μ makaslama deformasyonu ile makaslama gerilimi arasında bağlantı kurduğundan makaslama modülü olarak adlandırılmaktadır. λ (benim bildiğim) belirli bir adı yoktur. Ancak, λ ve μ birlikte toplam kütle modülü (K) ile ilişkilendirilebilir. Kütle modülü, bir birim küplük malzemenin hacmindeki değişimi bir küplük malzemeye uygulanan basınçla (negatif) ilişkilendirir. Elbette bu hesaplamayı üç boyutta yapmalıyız. İlk olarak, basıncın küpün bütün yüzeylerine uygulanan ortalama normal gerilim olduğunu dikkate almalıyız. Böylece

$$-P = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) / 3$$

Daha sonra, birim küpün hacim artışının, normal gerilimle şu şekilde ilişkilendirilebileceğini işaret ederiz:

$$\Delta V = (1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})(1+\varepsilon_{zz}) - 1 \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Son olarak, bizim gerilim-deformasyon ifadelerini normal gerilim/deformasyon için üç boyuta genişletmemiz sonucunda aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}$$

Bütün bu denklemler eklenirse

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = (3\lambda+2\mu)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

veya

$$-P=\Delta V\ (\lambda+2\mu/3) = K\Delta V$$

Böylece kütle modülü, K, ile Lame katsayıları ile arasındaki bağlantı:

$$K = (\lambda+2\mu/3)$$

Sismik Dalga Denklemi

Sismik dalgalar, jeolojik deformasyon ölçeğine (milyonlarca yıl) göre çok kısa zaman ölçeklerinde (saniyenin kesirlerinde) kabuğun, mantonun ve çekirdeğin elastik deformasyonuyla hareket ederler.

Biz sismik dalga denklemini, μ ve λ Lame katsayılı elastik bir malzemede gerilim-deformasyon ilişkisinde türetebiliriz. Bu genel üç boyutlu durumda gerçek bir sismolog tarafından yapılabilir. Fakat biz burada yalnızca basit düzlem P ve S dalgaları için dalga denklemini türeteceğiz. Şimdi P dalgalarıyla başlayalım ve x-yönünde ilerleyen bir dalgayı tasavvur edelim. Dalga treni, v_p hızıyla ilerleyen bir enerji paketinden oluşturmaktadır; Bu enerji paketi içersinde, elastik malzeme x-istikametinde ileriye geriye doğru titrer. Bir düzlem dalga için, y- ve z-yönlerinde hızda veya yer değişmede değişim yoktur. Bu nedenle, y- ve z-cinsinden bütün türevlerin 0 olduğunu tasavvur edebiliriz.

Ana fizik F=m*a' özüne kadar kısalmaktadır: Jeolojik zaman ölçeklerinde herhangi bir kuvvet dengesinde ivme ve moment terimleri (çekirdek dışında) etkin olarak 0'dır. Ancak çok kısa dönem deformasyonu için ivme önemlidir. Aksi takdirde dalgalar olmazdı. F=m.a formülüyle başlayalım ve bunu Δx, Δy, Δz boyutlu bir küp malzemesine etki eden kuvvetler cinsinden yazalım. Böylece:

$$[\sigma_{xx}(x+\Delta x)\Delta y\Delta z]-[\sigma_{xx}(x)\Delta y\Delta z]=(\rho\Delta x\Delta y\Delta z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

veya bunu Δx, Δy, Δz'ye bölerek ve Δx'in küçük olmasına göre limitini aldığımızda

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial_x}=\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

dir.

Şimdi σ_{xx}'i önceki kısımda türetilmiş denklemleri kullanarak normal deformasyonla yer değiştirelim:

$$\frac{\partial}{\partial_x}[(\lambda+2\mu)]\varepsilon_{xx}+\lambda\varepsilon_{yy}]=\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

Önceki bölümden yer-değiştirme türevleriyle ε_{xx} ve ε_{yy}'nin nasıl ilişkilendirileceğini biliyoruz. Bu yerleştirme yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial_x}\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\lambda\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]=\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

Ayrıca bu, μ ve λ'nın sabit oluşunu dikkate alarak ve bu tür düzlemsel dalga için y'ye göre bütün türevlerin "0" olduğu hatırlanarak daha da yalınlaştırılabilir. Böylece:

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}\right)=\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

Son olarak aşağıdaki bağlantıyı elde etmek için bölebiliriz:

$$\left[\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right]\left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

Bu x-yönünde ilerleyen bir düzlemsel P dalgası için dalga denklemidir. Bu, harmonik bir oskilatör için hareket denklemini hatırlatmalıdır. Bundan, bir malzeme içinden dalganın ilerleme hızını kolayca bulabiliriz. Bunun bir gurup hızı olduğunu, herhangi bir noktada malzemenin hareket hızıyla aynı olmadığını anımsamalıyız. v_p hızıyla ilerleyen bir (dispersif olmayan) bir dalgamız olduğunu varsayalım. Daha sonra, dalganın şekli u(x-v_pt) olacaktır. Burada u'un dalga dolayısıyla meydana gelen yer değiştirmeyi tarif eden bir fonksiyondur. Bunu yukarıdaki denklemde yerine yerleştirirsek aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\left[\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right] u''(x - v_p t) = v_{p^2} u''(x - v_p t)$$

ya da

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Aynı işlemleri kullanarak, düzlemsel bir S dalgasının hızının

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Dalga denklemini yalnızca basit düzlemsel dalgalar için türetmiş olmamıza rağmen, elde etmiş olduğumuz P- ve S-dalga hızları bütün sismik dalgalar için geçerlidir. Bazen P-dalga hızını lame katsayısı λ yerine, K, kütle modülü cinsinden yazılmış olduğunu görürsünüz:

$$v_p = \sqrt{\frac{(K + 4\mu/3}{\rho}}$$