

Soru Takımı #5'in Çözümleri

Konveksiyon

1.

$$Ra = d^3 \alpha \rho g \Delta T / \mu \kappa$$

$$[Ra] = \frac{[m^3] \left[\frac{1}{^\circ C} \right] \left[\frac{kg}{m^3} \right] \left[\frac{m}{s^2} \right] [^\circ C]}{\left[\frac{kg}{ms} \right] \left[\frac{m^2}{s} \right]} = 1 \text{ Boyutsuz}$$

$$2. \sigma = 10^{-3} \text{ MPa} = 10^3 \text{ Pa}$$

$$\sigma = \frac{F}{Alan}, \text{ Küpün kenarının alanı } A=10^{12} \text{ m}^2$$

$$F=\sigma \cdot A=10^3 \text{ Pa} \cdot 10^{12} \text{ m}^2 = 10^{15} \text{ N}$$

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$m = V \cdot \rho = 4 \cdot 10^{21} \text{ kg}$$

$$P=4000 \text{ kg/m}^3$$

$$V=10^{18} \text{ m}^3$$

$$a = \frac{10^{15} \text{ N}}{4 \cdot 10^{21} \text{ kg}} = 0.25 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2}$$

Başlangıçtaki hızı sıfır olarak varsayalım.

$$a = \frac{\Delta V^*}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V = \Delta t \cdot a = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s} \cdot 0.25 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2} = 7.884 \text{ m/s} \approx$$

$2.49 \cdot 10^{11} \text{ mm/yıl} : 100 \text{ mm/yıl}$ ile karşılaştırılınca çok hızlıdır.

Böyle hızları mantoda beklemediğimizden ötürü, malzemeye etki eden net kuvvetler (gerilimler) hemen hemen sıfır olmalıdır.

3.

$$a) Q_{iletimsel} = \frac{K \Delta T}{d}$$

$$Q_{iletimsel} = \beta \frac{d^2 \rho^2 \Delta T^2 g d C_p}{\mu}$$

$$K = \kappa \rho C_p$$

$$\frac{Q_{Konvektif}}{Q_{iletimsel}} = \beta \frac{d^2 \rho^2 \Delta T^2 g \alpha C_p}{\mu} * \frac{d}{K \Delta T}$$

$$= \beta \frac{d^3 \rho^2 \Delta T g d C_p}{\mu} * \frac{1}{\kappa \rho C_p}$$

$$= \beta \frac{d^3 \alpha \rho g \Delta T}{\mu \kappa} = \beta * Ra$$

b) Toplam ısı akısı Qiletimsel ile QKonvektifin toplamına eşittir. Eğer katmanlar değişik $\frac{Q_{Konvektif}}{Q_{iletimsel}}$ oranlarına sahip iseler, $Q_{konvektif} + Q_{iletimsel}$ aynı olsa bile, farklı Ra ya sahiptirler.

4. Yaklaşım 1: Kararlı durum denkleminde R yi hesaplayınız ve manto konveksiyona uğruyorsa, Ra yı denetleyiniz.

Kararlı durum:

$$0 = -\beta \frac{d \rho \Delta T^2 g \alpha}{\mu} + \frac{Q_r R}{\rho C_p d} \quad g = g e \frac{R}{Re} \quad d = \frac{R}{2}$$

$$0 = -\beta \frac{R^2 \rho \Delta T^2 g e \alpha}{2 R e \mu} + \frac{2 Q_r}{\rho C_p}$$

$$R = \sqrt{\frac{4 Q_r R e \mu}{\rho^2 C_p \beta \Delta T^2 g e \alpha}} \text{ Yerine yerleştirilmeler yapılırsa, } R = 5634 \text{ km}$$

$$Ra = \left(\frac{R}{2}\right)^3 \alpha \rho g e \frac{R}{Re} \Delta T \frac{1}{\mu \kappa}$$

Ra=15747, 1000'den daha yüksek. Dolayısıyla konveksiyona uğruyor.

Yaklaşım 2: Ra yı kararlı durum denkleminde yerine koy ve mantonun döngüye uğramış olduğu minimum R değerini belirleyiniz.

$$0 = -\beta \frac{d \rho \Delta T^2 g \alpha}{\mu} + \frac{Q_r R}{\rho C_p d} \quad Ra = \frac{d^3 \alpha \rho g \Delta T}{\mu \kappa}$$

$$0 = -\beta Ra \frac{\kappa \Delta T}{d^2} + \frac{Q_r R}{\rho C_p d} \Rightarrow Ra = \sqrt{\frac{2 \beta Ra \kappa \Delta T \rho C_p}{Q_r}}$$

Ra=1000 için $R = 449 \text{ km}$

```

% P4
-----
Qr = 10^-8;           % W/m^3
ge = 10;              % m/s^2
k = 10^-6;           % m^2/s
rho = 4000;          % kg/m^3
Cp = 1240;           % J/kgK
K = 5;               % W/mK
alpha = 10^-5;       % 1/C
delta_T = 20;        % C
mu = 10^-21;        % Pa.s
beta = 0.01;         % m
Re = 6400000;        % m

P4_R1 = sqrt(4*Qr*Re*mu/(rho^2*Cp*beta*delta_T^2*ge*alpha))
d = P4_R1/2;
P4_Ra1 = d.^3*alpha*rho*ge.*P4_R1/Re*delta_T/(mu*k)
Ra = [200 1000];
P4_R2 = sqrt(2*beta*Ra*k*delta_T*rho*Cp/Qr)
ANS
-----
P4_R1 = 5.6344e+05
P4_Ra1 = 1.5747e+05
P4_R2 =
    1.0e+05 *
    2.0000    4.4900

```

5.

$$\ln\left(\frac{Q_r R \mu_0}{\beta d^2 \rho^2 C_p \Delta T^2 g d}\right) - \ln\left(1 - \exp\left(\frac{-t \gamma Q_r}{\rho C_p}\right)\right) = \gamma(T - T_0)$$

```

% P5
gamma = 0.05;
mu0 = 10^22; % Pa
T0 = 1300; % K
Delta_T = 10; % K
t = 4.5*10^9*60*60*24*365; % s
d=Re/2;

LHS = log(Qr*Re*mu0/(beta*d^2*rho^2*Cp*delta_T^2*ge*alpha)) - log(1 -
exp(-t*gamma*Qr/(rho*Cp)));

P5_T_a = LHS/gamma + T0

P5_q_conv_a = beta*d^2*rho^2*delta_T^2*ge*alpha*Cp/(mu0*exp(gamma*(T0-
P5_T_a)))

Cr = 10^-12;

LHS = log(Qr*Re*mu0/(beta*d^2*rho^2*Cp*delta_T^2*ge*alpha)) - log(1 -
exp(-t*gamma*Qr/(rho*Cp)));

P5_T_b = LHS/gamma + T0

P5_q_conv_b = beta*d^2*rho^2*delta_T^2*ge*alpha*Cp/(mu0*exp(gamma*(T0-
P5_T_b)))

ANS

```

- a) P5_T_a = 1.3687e+03
P5_q_conv_a = 0.0640
- b) P5_T_b = 1.3158e+03
P5_q_conv_b = 0.0045