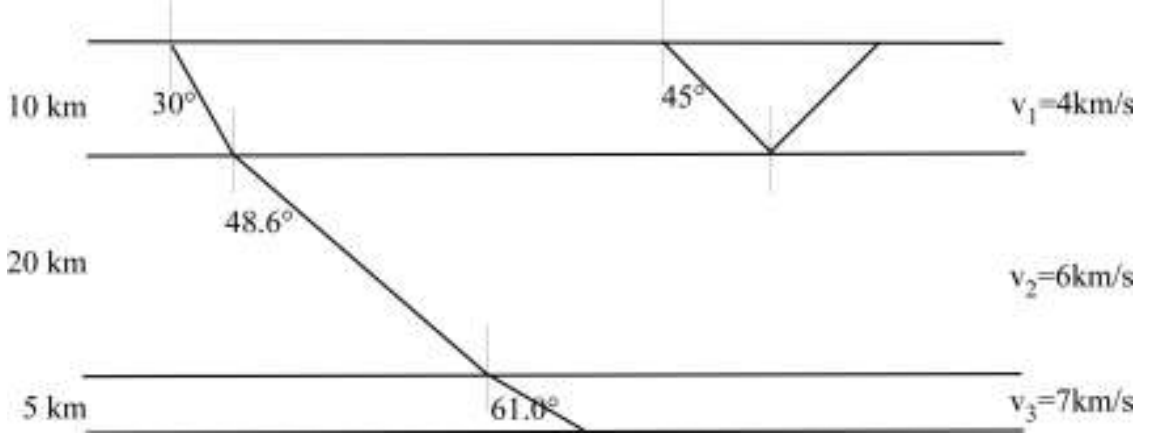


Soru Takımı #3'ün Çözümleri

Sismoloji

1.



Snell Yasası: $\frac{v_1}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{\sin\alpha_2}$

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{v_2 \sin\alpha_1}{v_1}\right)$$

$$\alpha_1=30^\circ \text{ için, } \alpha_2 = \arcsin\frac{6\sin30}{4} \approx 48.6^\circ$$

$$\alpha_3 = \arcsin\frac{7\sin\alpha_2}{6} = 61.0^\circ$$

$\alpha_2=45^\circ$ için, $\alpha_2 = \arcsin\frac{6\sin45}{4} \approx 48.6^\circ$ gerçek değildir. Kırılma yoktur ve yalnızca yansıma

2. P-dalgası

- Eğri aşağıya doğru konkavdır.

Bu P-dalga hızının derinlikle artmasının bir sonucudur. Bu ayrıca, bir ışının takip etmiş olduğu mesafe, açısal mesafenin çizgisel bir işlevi olmadığından aynı şekilde geometrinin bir sonucudur.(Soru 3 de elde ettiğiniz grafiklerin de, manto da sabit P-dalga hızları varsayılmasına rağmen, eğri olduğuna dikkat ediniz).

- $\sim 103^\circ$ nin ötesine gitmemektedir.

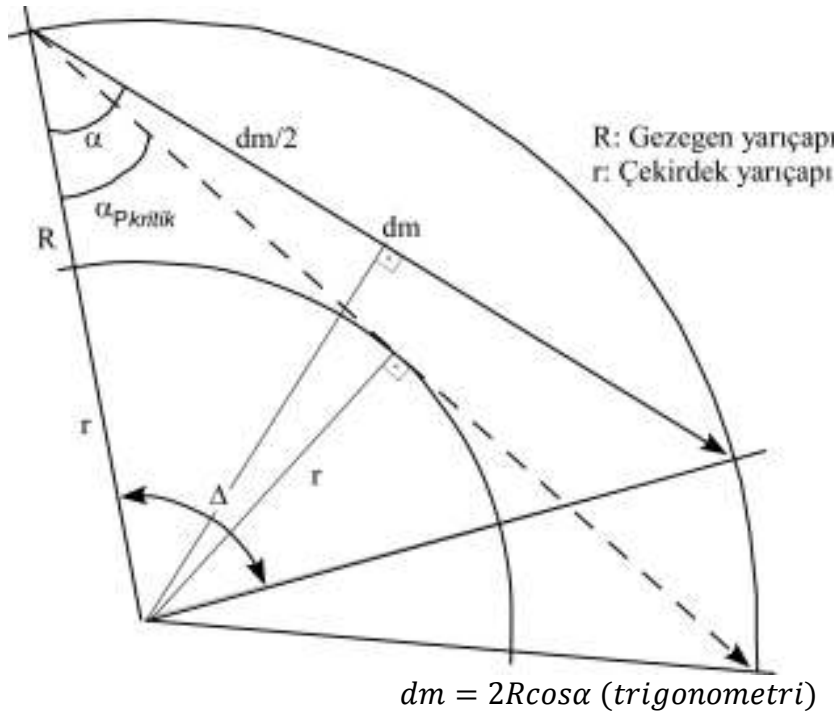
Çekirdek sığ olup, 103° , çekirdeğin toplam yarıçapa oranının bir sonucudur.

PKP-Dalgası:

- P ve PKP dalgaları arasında Δ 'da boşluk
- P dalgası için $v_m > v_c$ olmasından ötürü çekirdekte normale doğru kırılma sonucu.

3. α açısının (düşeyle kaynağı terk eden ışın arasındaki açı) işlevi olarak P ve PKP dalgaları için Δ ve t için ifadeler bulacağız.

P-dalgası:



Verilenler: R, r, v_m ve v_c

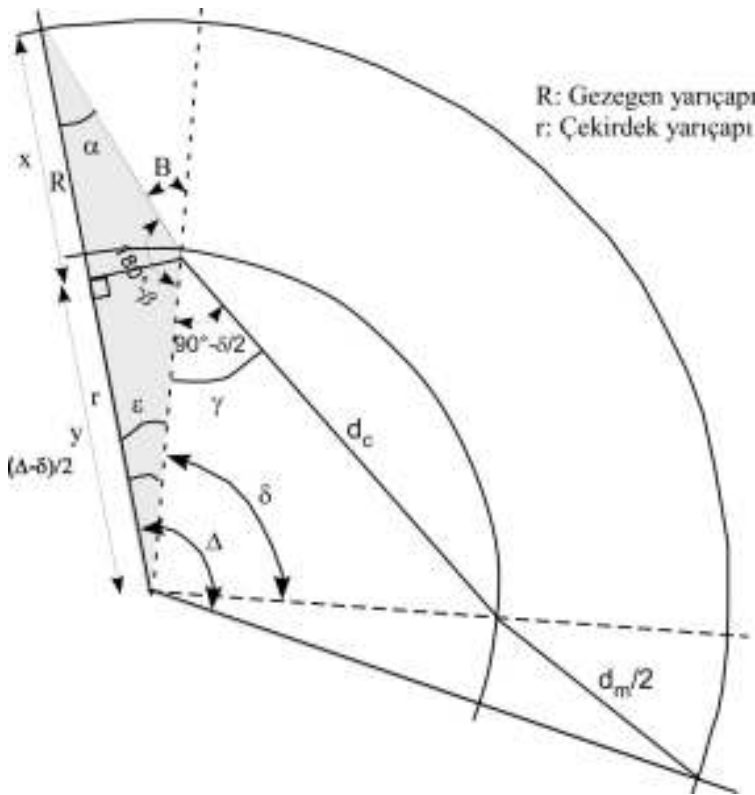
$\alpha_{P_{kritik}} : \sin \alpha_{kritik} = \frac{r_c}{R}$
trigonometriden

$\alpha_{P_{kritik}} = \arcsin \frac{r_c}{R}$
 $\Delta: \Delta = 180 - 2\alpha$ (Δ açıları)

$$dm : \cos \alpha = \frac{dm}{2} / R$$

$$dm = 2R \cos \alpha \text{ (trigonometri)}$$

$t: t = \frac{dm}{v_m}$ Hız denklemi, Δ 'yı t'ye karşı olarak α açısı için diyagrama aktarınız ($\alpha_{kritik}, 90$)



PKP-Dalgası

Δ ve t'yi en sonunda α 'nın bir işlevi olarak ifade etmek aşağıdakiler için ifadeler bulacağız: (ϵ, dm, dc, β ve γ)

Gölgelendirilmiş üçgene sinüs teoremi uygulanırsa, aşağıdaki ifadeye ulaşırız:

$$\frac{\sin \epsilon}{dm/2} = \frac{\sin \alpha}{r} \Rightarrow dm = \frac{2r \sin \epsilon}{\sin \alpha}$$

Eğer taranmış üçgenin R kenarına bir düşey indirilirse, ve onu x ve y gibi iki kısma ayırırsa,

$$x + y = R \text{ ve } x = \frac{dm}{2} \cos \alpha$$

$$y = r \cos \epsilon$$

$$\frac{dm}{2} \cos \alpha + r \cos \epsilon = R$$

$$\frac{r \sin \varepsilon}{\sin \alpha} \cos \alpha + r \cos \varepsilon = R$$

$$\frac{r \sin \varepsilon}{\sin \alpha} \cos \alpha + r \cos \varepsilon = R/r$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha} \cos \alpha + \cos \varepsilon = \frac{R}{r}$$

$$\sin \varepsilon \cos \alpha + \cos \varepsilon \sin \alpha = \frac{R}{r} \sin \alpha \quad \sin(\alpha + \varepsilon) = \frac{R}{r} \sin \alpha$$

$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) - \alpha$ Burada ε nu α nın fonksiyonu olarak ifade ettik. Bunu tekrar dm denkleminde $dm(\alpha)$ yı elde etmek için yerine koyalım:

$$\beta: 180 - \beta = 180 - \alpha - \varepsilon \text{ (Üçgenin açıları)} \quad \beta = \alpha + \varepsilon$$

$$\gamma: \frac{v_m}{\sin \beta} = \frac{v_c}{\sin \gamma} \text{ (Snell Yasası)}$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{v_c \sin \beta}{v_m}\right)$$

$$dc: \quad \cos \gamma = \frac{dc}{r_c} \quad \text{Trigonometri}$$

$$d_c = 2r_c \cos \gamma$$

$\Delta: \Delta = 3 * 180 - 2\alpha - 2\gamma - \alpha(180 - \beta)$ Pentagonun açılarından

$$\Delta = 180 - 2\alpha + 2\beta - 2\gamma$$

$$t: t = \frac{d_m}{v_m} + \frac{d_c}{r_c} \text{ (hız denklemi)}$$

MATLAB de yukarıdaki işlemleri sırasıyla yaparsak, o zaman bütün değerler tanımlanırlar.

Merkür için ($v_c < v_m$), Δ 'yı t'ye karşı olarak a(0, aPKritik) için diyagrama aktarınız. Mars için ($v_c > v_m$), manto çekirdek sınırına gelen her ışın kırılmaya uğramayacağından, $\alpha_{PKP, kritik}$ belirlemek zorundayız.

Manto sınırına vuran ve çekirdeğe kırılan bir ışın için şartlar $\gamma < 90^\circ$ dir.

$$\frac{v_m}{\sin \beta} = \frac{v_c}{\sin 90^\circ}, \text{ (Snell Yasası)}, \quad \sin \beta = \frac{v_m}{v_c}, \quad \alpha_2 = \arcsin \frac{v_m}{v_c}$$

Şimdi, yukarıdaki ε ve β denklemlerini kullanarak, kritik $\alpha_{PKP, kritik}$ açısını hesaplayıp, Mars için a(0, aPKP kritik) için Δ 'yı t'ye karşı diyagrama aktarılır.

Bu diyagramlardan, Merkür'ün Yeryuvarı'na benzer olduğu $v_m > v_c$ olduğundan P ve PKP dalgalarının varışları arasında bir boşluk vardır. Bu da çekirdeğin sıvı olduğuna ima etmektedir.

Bunun tersi olarak, Mars için P ve PKP dalgalarının varışlarında bir örtüşme gözlenmektedir. Bu $v_c > v_m$ olgusu ile birlikte Mars'ın içinin katı olduğuna işaret etmektedir.

```

% Mercury (green)

vn = 8;
vc = 6;
r = 1800;
R = 2440;

% P-wave
alpha_P_crit = asind(r/R);
alpha = alpha_P_crit:0.01:90;
delta = 180 - 2.*alpha;
dn = 2*R.*cosd(alpha);
t = dn/vn;

plot(delta,t,'-.');
title('P and PKP travel times as function of angular distance for Mercury [dash-dot]
and Mars [cont]');
xlabel('angular distance [degrees]');
ylabel('travel time [s]');
hold on

% PKP-WAVE
alpha = 0:0.1:alpha_P_crit;
epsilon = asind(R/r.*sind(alpha)) - alpha;
dn = (2*r.*sind(epsilon))./sind(alpha);
beta = epsilon + alpha;
gamma = asind((vc.*sind(beta))/vn);
dc = 2*r.*cosd(gamma);
delta = 180 + 2*beta - 2*alpha - 2*gamma;
t = dc/vc + dn/vn;

plot(delta,t,'-.');
hold on

```

*calculate alpha critical
define d vector*

```
% Mars (red)
```

```
vm = 10;  
vc = 11;  
r = 1200;  
R = 3400;
```

```
% P-wave
```

```
alpha_P_crit = asind(r/R);
```

*calculate d_pertical
define d vector*

```
alpha = alpha_P_crit:0.01:90;
```

```
delta = 180 - 2.*alpha;
```

```
dm = 2*R.*cosd(alpha);
```

```
t = dm/vm;
```

```
plot(delta,t);  
hold on
```

```
% PKP-wave
```

```
alpha = 0:0.01:alpha_P_crit;
```

```
1) epsilon = asind(R/r.*sind(alpha)) - alpha;
```

```
2) dm = (2*r.*sind(epsilon))./sind(alpha);
```

```
3) beta = epsilon + alpha;
```

```
for n=1:length(beta)  
    if (beta(n) <= asind(vm/vc))  
        i = n;  
    end  
end
```

*calculate new constraint for
d → d_pertical
and recalculate everything
with the new vector*

```
4) alpha_PKP_crit = alpha(i);
```

```
alpha = 0:0.1:alpha_PKP_crit;
```

```
1) epsilon = asind(R/r.*sind(alpha)) - alpha;
```

```
2) dm = (2*r.*sind(epsilon))./sind(alpha);
```

```
3) beta = epsilon + alpha;
```

```
4) gamma = asind((vc.*sind(beta))/vm);
```

```
5) dc = 2*r.*cosd(gamma);
```

```
delta = 180 + 2*beta - 2*alpha - 2*gamma;
```

```
t = dc/vc + dm/vm;
```

```
plot(delta,t);
```

8

4.

$\rho = \int \rho g dz$ derinlik üzerinden (yarıçap üzerinden) entegralini alınırsa,

$$g = \frac{MinG}{r^2} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{G}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho r$$

$$r = R - z$$

$$\rho = \int_0^z \rho \frac{4}{3} \pi G \rho r dz = \frac{4}{3} \pi G \rho^2 \int_0^z (R - z) dz = \frac{4}{3} \pi G \rho^2 \left[Rz - \frac{z^2}{2} \right]_0^z = \frac{4}{3} \pi G \rho^2 \left(Rz - \frac{z^2}{2} \right)$$

```

% Mars
R = 3400000; % [m]
rho = 3930; % [kg/m^3]
G = 6.67 * 10^-11; % [m^3/(kg s^2)]

z = 0:1000:R;

P1 = 4/3*pi*rho^2*G.*(R*z - 0.5.*z.^2);

P2 = P1 - 24*10^9;
P3 = abs(P2);
[a,b] = min(P3);

Mars_depth_of_24GP = z(b)/1000
Mars_r_of_24GP = R/1000 - Mars_depth_of_24GP

% Moon
R = 1740000; % [m]
rho = 3350; % [kg/m^3]
G = 6.67 * 10^-11; % [m^3/(kg s^2)]

z = 0:1000:R;

P1 = 4/3*pi*rho^2*G.*(R*z - 0.5.*z.^2);

P2 = P1 - 24*10^9;
P3 = abs(P2);
[a,b] = min(P3);

Moon_max_pressure = P1(length(P1))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Mars_depth_of_24GP = 2739
Mars_r_of_24GP = 661
Moon_max_pressure = 4.7465e+09

} 24GPa exists in Mars at r=661 km,
which is within core. There is probably no
perovskite on Mars, as core has different
composition (probably mostly metallic) and
would not support perovskite due to
composition constraints.
↳ Moon does not have enough pressure for
perovskite transition → no perovskite.

```

5.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$T(z, t) = T_s + (T_0 - T_s) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{kt}} \right) = T_s + (T_0 - T_s) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{kt}}} e^{-y^2} dy$$

Dikkat edelim ki,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$LHS = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2(T_0 - T_s)}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{2\sqrt{kt}} \left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right) e^{-\frac{z^2}{4kt}}$$

$$= -\frac{(T_0 - T_s)z}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{z^2}{4kt}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2(T_0 - T_s)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{kt}} e^{-\frac{z^2}{4kt}}$$

$$RHS = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \kappa \frac{T_0 - T_s}{\sqrt{\pi kt}} \left(-\frac{2z}{4kt}\right) e^{-\frac{z^2}{4kt}}$$

$$= -\frac{(T_0 - T_s)z}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{z^2}{4kt}}$$

LHS=RHS

6 a)

$$z_0 = 50 \text{ km} = 50 * 10^3 \text{ m}$$

$$K = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$T_m = T_o = 1500^\circ\text{C}$$

Litosferin tabanında:

$$T(z_b, t) = T_s + (T_0 - T_s) \operatorname{erf} \left(\frac{z_b}{2\sqrt{kt}} \right)$$

Litosferin tabanındaki sıcaklığın (T_b) $0.99T_0$ olduğunu kabulleniyoruz.

$$\frac{0.99T_0 - T_s}{T_0 - T_s} = \operatorname{erf} \left(\frac{z_b}{2\sqrt{kt}} \right) \text{ Bizim kaba tahminimizde } T_s \text{ 'yi ihmal edebiliriz.}$$

$$0.99 \approx \operatorname{erf} \left(\frac{z_b}{2\sqrt{kt}} \right)$$

$$\operatorname{erf} \text{ çizelgelerinden } 0.99 \text{ da } \frac{z_b}{2\sqrt{kt}} = 1.82$$

$$t = \left(\frac{z_b}{2 * 1.82\sqrt{k}} \right)^2 = 1.8868 * 10^{14} \text{ s} \approx 6.98 \text{ my}$$

Bu tahmine göre, Merkür'ün litosferi çok gençtir (≈ 6 milyon yıl).

b) Eğer litosfer gerçekten 4 milyar yıl yaşında ise, ve yalnızca iletimle soğuma iş başında ise bu litosferin çok daha kalın olacağı anlamına gelmektedir. 4 milyar yıl yaşındaki litosfer için kalınlığı benzer şekilde tahmin edebiliriz.

$$0.99 = \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{kt}} \right)$$

$$\frac{z}{2\sqrt{kt}} = 1.82 \Rightarrow z = 2 * 1.82\sqrt{kt}$$

$$z \approx 1293 \text{ km}$$

Eğer litosfer beklendiği gibi, 1293 km değilse, çok daha ince ise (~50 km ise), litosferi alttan incelten bir süreç olmalıdır ya da soğumanın önüne geçen: Alt litosferin yeniden ergimesi, mantoda kızgın sorguclar gibi..