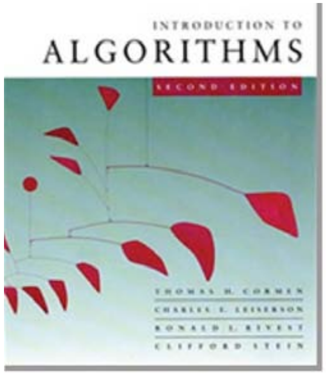
Algoritmalara Giriş

6.046J/18.401J

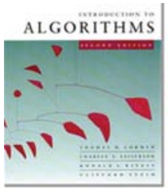


DERS 13

Amortize Edilmiş Analiz

- Dinamik Tablolar
- Birleşik Metod
- Hesaplama Metodu
- Potansiyel Metodu

Prof. Charles E. Leiserson



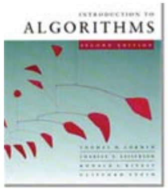
Kıyım tablosu ne kadar büyük olmalı?

Amaç : Tabloyu olabildiğince küçük yapın, ama yeterince de büyük olmalı ki taşma olmasın. (Aksi takdirde verimsiz olur.)

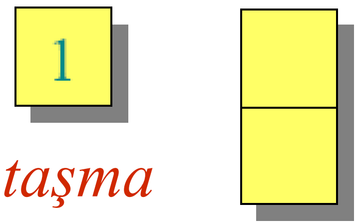
Problem : Uygun boyutun ne olması gerektiğini önceden bilemiyorsak ne olacak?

Çözüm : Dinamik Tablolar

FİKİR : Her ne zaman tablo taşarsa, (**malloc** veya new kullanarak) yeni ve daha büyük bir tablo oluşturun. Eski tablodaki bütün elemanları yenisine taşıyıp, eski tablonun depolama yerini boşaltın.



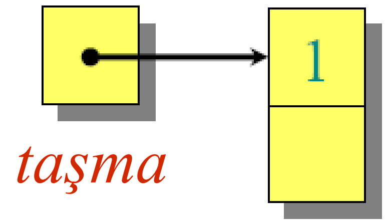
Dinamik Tablo Örneği

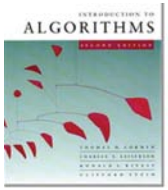


1. **Insert/ Ekle**
2. **Insert /Ekle**

Dinamik Tablo Örneği

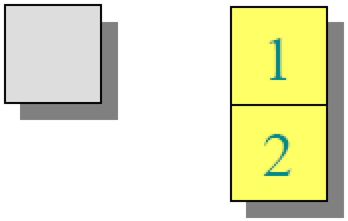
1. **Ekle**
2. **Ekle**





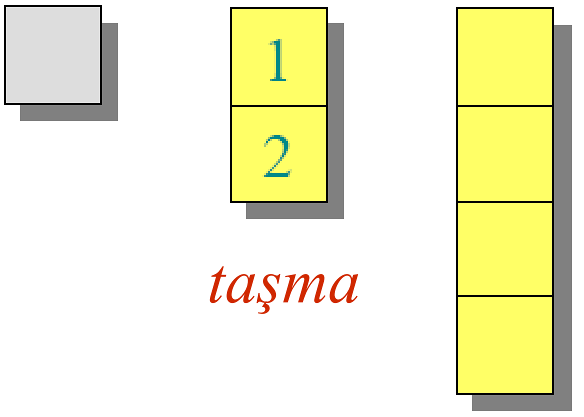
Dinamik Tablo Örneği

1. Ekle
2. Ekle



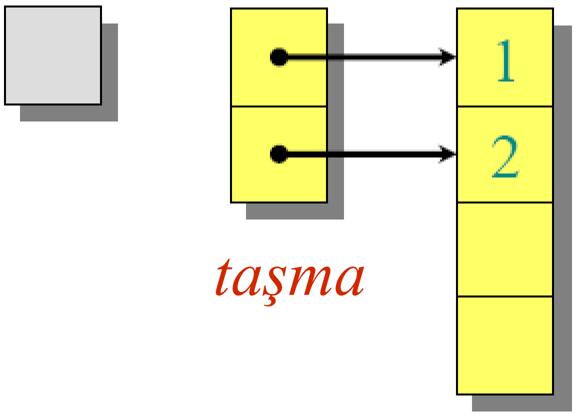
Dinamik Tablo Örneği

1. Ekle
2. Ekle
3. Ekle



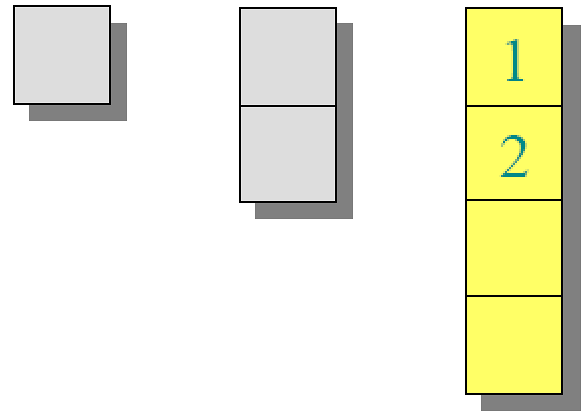
Dinamik Tablo Örneği

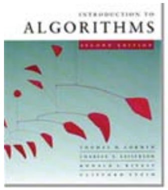
1. **Ekle**
2. **Ekle**
3. **Ekle**



Dinamik Tablo Örneği

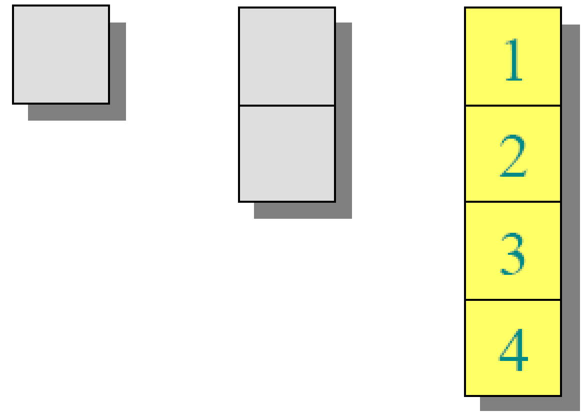
1. Ekle
2. Ekle
3. Ekle





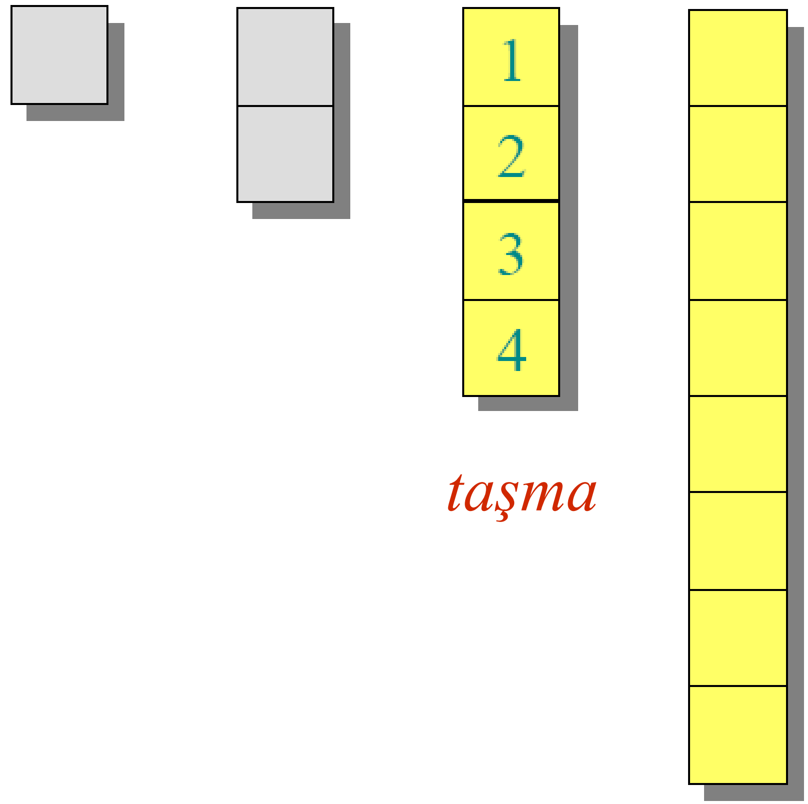
Dinamik Tablo Örneği

1. Ekle
2. Ekle
3. Ekle
4. Ekle



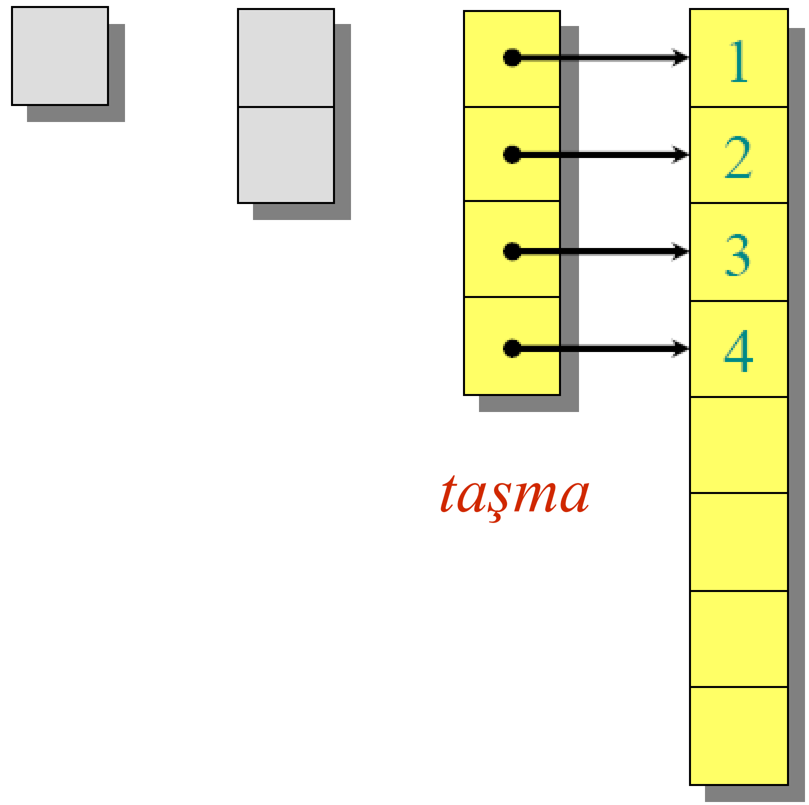
Dinamik Tablo Örneği

1. **Ekle**
2. **Ekle**
3. **Ekle**
4. **Ekle**
5. **Ekle**



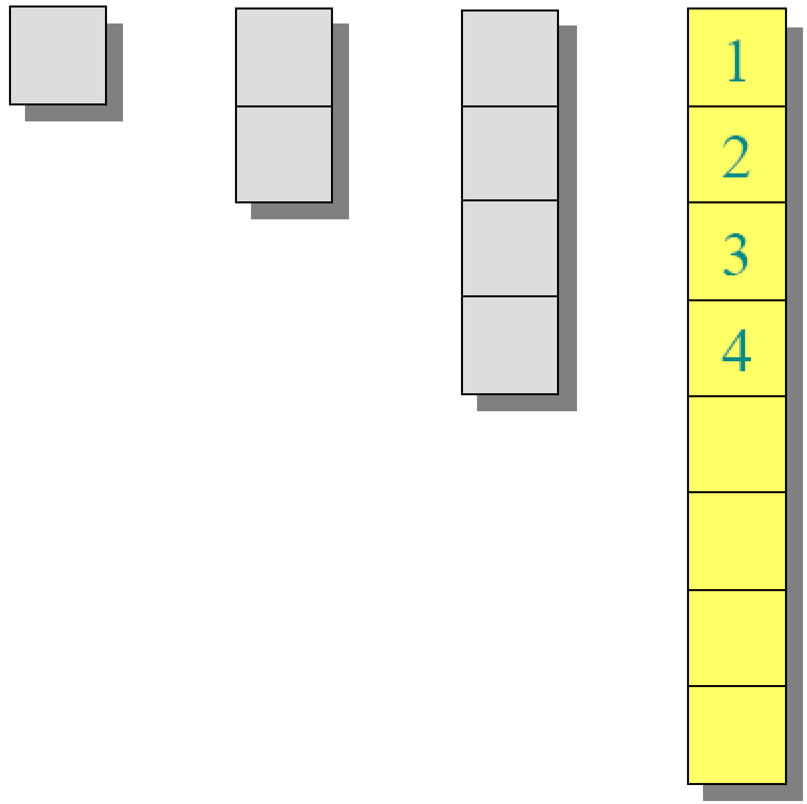
Dinamik Tablo Örneği

1. **Ekle**
2. **Ekle**
3. **Ekle**
4. **Ekle**
5. **Ekle**



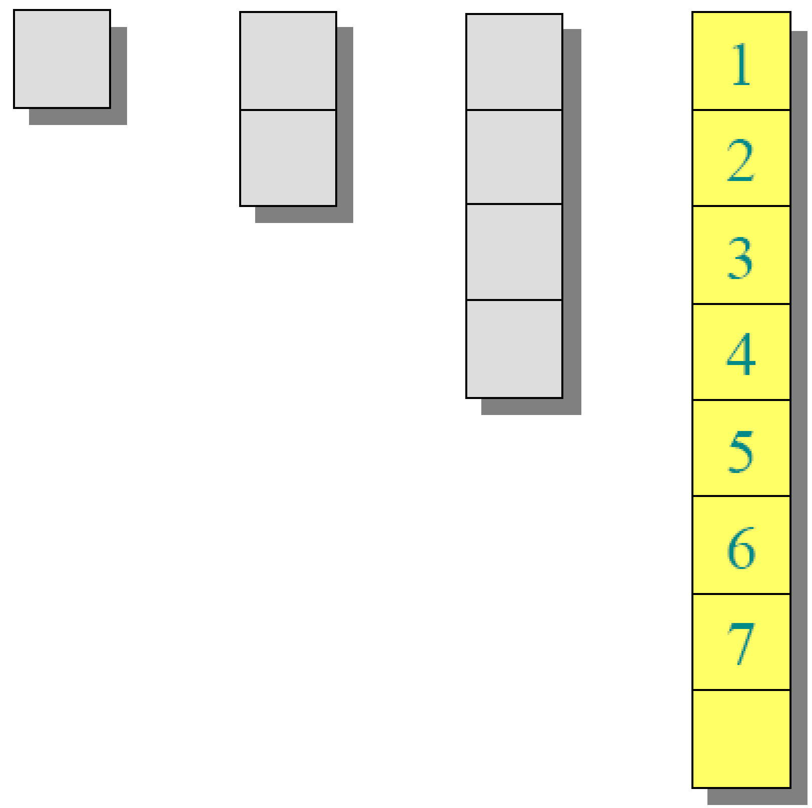
Dinamik Tablo Örneği

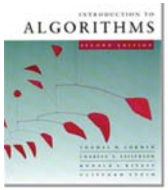
1. **Ekle**
2. **Ekle**
3. **Ekle**
4. **Ekle**
5. **Ekle**



Dinamik Tablo Örneği

1. **Ekle**
2. **Ekle**
3. **Ekle**
4. **Ekle**
5. **Ekle**
6. **Ekle**
7. **Ekle**



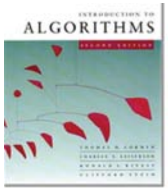


En kötü durum çözümlemesi

n tane ekleme olduğunu düşünün. Bir eklemeyi yapmak için gerekecek en kötü zaman $\Theta(n)$. Dolayısıyla n tane ekleme için en kötü zaman $n \,.\, \Theta(n) = \Theta(n^2)$.

YANLIŞ! Aslında *n* tane ekleme için gerekecek en kötü durum süresi sadece $\Theta(n) \ll \Theta(n^2)$'dir.

Neden olduğunu görelim!

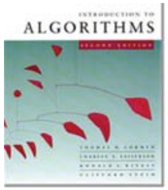


Daha sıkı bir çözümleme

c_i = i’nci eklemenin maliyeti olsun.

$$= \begin{cases} i & \text{eğer } i\text{-}1, 2\text{’nin tam kuvvetiyse,} \\ 1 & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
büyüklük $_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16
c_i	1	2	3	1	5	1	1	1	9	1

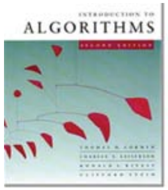


Daha sıkı bir çözümleme

c_i = i'nci eklemenin maliyeti olsun.

$$= \begin{cases} i & \text{eğer } i-1,\ 2\text{'nin tam kuvvetiyse,} \\ 1 & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$size_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16
c_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2		4				8	

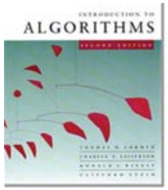


Daha sıkı bir çözümleme (devam)

n tane eklemenin maliyeti

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \\
&\le n + \sum_{j=0}^{\lfloor \lg(n-1) \rfloor} 2^j \\
&\le 3n \\
&= \Theta(n)\,.
\end{aligned}
$$

Bu durumda, her bir dinamik tablo işleminin ortalama maliyeti $\Theta(n)/n = \Theta(1)$.

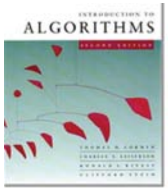


Amortize edilmiş çözümleme

Amortize edilmiş analiz, bir dizi işlem içindeki tek bir işlemin pahalı olması durumunda bile, ortalama işlem maliyetinin küçük olduğunu göstermek için kullanılan bir yöntemdir.

Ortalamaları almamıza rağmen, olasılık göz önüne alınmaz.

- Amortize edilmiş çözümleme, her bir işlemin *en kötü durumdaki* ortalama performansını garanti eder.



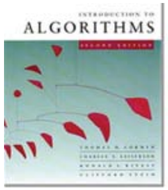
Amortize edilmiş çözümleme çeşitleri

3 çeşit amortizasyon yöntemi vardır.

- Birleşik metod,
- Hesaplama metodu,
- Potansiyel metodu.

Şu ana kadar sadece birleşik metodu gördük.

Birleşik metod basit olmasına karşın, diğer iki metodun kesinliğine sahip değildir. Hesaplama ve potansiyel metodları, her bir işleme belli bir ***amortize edilmiş maliyet*** atanmasına izin verir.



Hesaplama metodu

- i'nci işleme, hayali ***amortize edilmiş*** bir $\hat{c}_i$ maliyeti yükler, 1 birim işe 1\$ öder. (örnek: zaman)

- Bu miktar işlemin yapılması için harcanır.

- Harcanmayan her hangi bir ödeme, **banka**da daha sonraki işlemlerde kullanılmak üzere saklanır.

- Banka hesabı hiçbir zaman eksi olamaz. Bütün n'ler için

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \le \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$$

olduğundan emin olmalıyız.

- Toplam amortize edilmiş maliyet, gerçek bütün maliyetler için bir üst sınır oluşturur.

Dinamik tabloların hesaplama çözümlemesi

i'nci ekleme için ***amortize edilmiş*** bir $\hat{c}_i = \$3$ maliyeti ekleyin.

•$1 anında ekleme için harcanır.

•$2 ise daha sonraki tablo büyütme (iki katına) işlemleri için saklanır.

Tablo iki katına çıkartıldığında $1 son elemanın yerleştirilmesi, $1 da eski bir elemanın yerleştirilmesi için harcanır.

ÖRNEK:

$0	$0	$0	$0	$2	$2	$2	$2

taşma

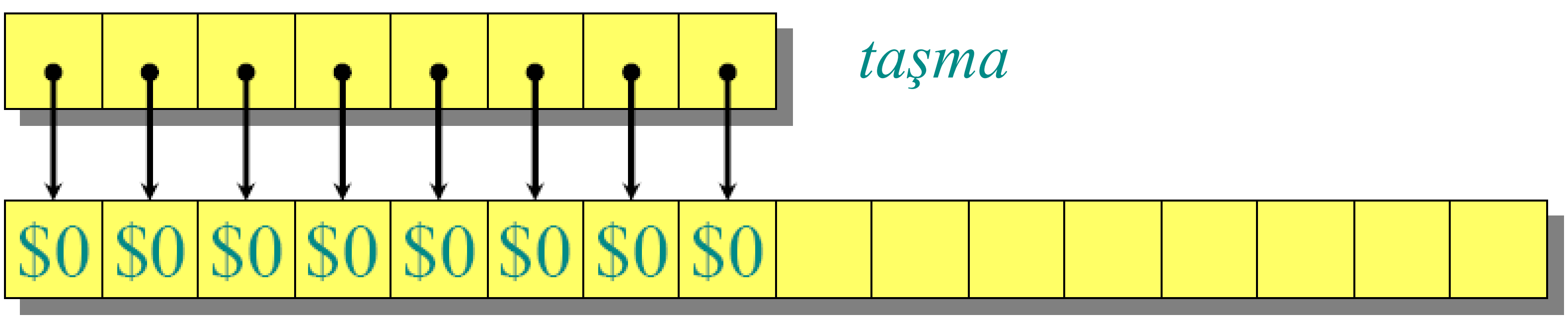
Dinamik tabloların hesaplama çözümlemesi

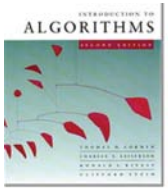
i’nci ekleme için ***amortize edilmiş*** bir $\hat{c}_i = \$3$ maliyeti ekleyin.

- $1 anında ekleme için harcanır.
- $2 ise daha sonraki tablo büyütme (iki katına) işlemleri için saklanır.

Tablo iki katına çıkartıldığında $1 son elemanın yerleştirilmesi, $1 da eski bir elemanın yerleştirilmesi için harcanır.

ÖRNEK:





Dinamik tabloların hesaplama çözümlemesi

i'nci ekleme için ***amortize edilmiş*** bir $\hat{c}_i = \$3$ maliyeti ekleyin.

•\$1 anında ekleme için harcanır.

•\$2 ise daha sonraki tablo büyütme (iki katına) işlemleri için saklanır.

Tablo iki katına çıkartıldığında \$1 son elemanın yerleştirilmesi, \$1 da eski bir elemanın yerleştirilmesi için harcanır.

ÖRNEK:

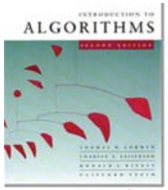
\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$2	\$2	\$2					

Hesaplama çözümlemesi (devamı)

Anahtar değişmezi: **Banka hesabı hiçbir zaman 0'ın altına düşemez. Amortize edilmiş maliyetlerin toplamı, gerçek maliyetler için bir üst sınır sağlar.**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
büyüklük $_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16
c_i	1	2	3	1	5	1	1	1	9	1
$\hat{c}_i$	2*	3	3	3	3	3	3	3	3	3
banka $_i$	1	2	2	4	2	4	6	8	2	4

* **Yani yalan söyledim.İlk işlem $3'a değil, $2'a mal olur.**



Potansiyel metodu

FİKİR : Banka hesabını dinamik kümenin potansiyel enerjisi olarak düşünün.

Çerçeve :

• Bir D_0 başlangıç veri yapısı seçin.

• i işlemi D_{i-1}'i D_i'ye çevirir.

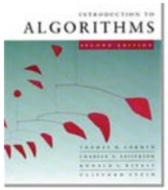
• i işleminin maliyeti c_i'dir.

• Bir potansiyel fonksiyon tanımlayın. $\Phi : \{D_i\} \rightarrow \mathbb{R}$,

Öyle ki bütün i'ler için; $\Phi(D_0) = 0$ ve $\Phi(D_i) \geq 0$

• Φ ye göre amortize edilmiş maliyet şu şekilde tanımlanır:

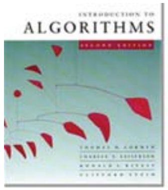
$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$



Potansiyelleri Anlamak

$$\hat{c}_i = c_i + \underbrace{\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})}_{\textit{Potansiyel fark} \quad \Delta\Phi_i}$$

- Eğer $\Delta\Phi_i > 0$ ise $\hat{c}_i > c_i$ dir. i işlemi; işi, daha sonra kullanmak üzere veri yapısında saklar.
- Eğer $\Delta\Phi_i < 0$ ise $\hat{c}_i < c_i$ dir. Veri yapısı, daha önce saklanan işi, i işleminde kullanılmak üzere getirir.

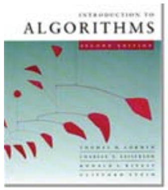


Amortize edilmiş maliyetler, gerçek maliyet için sınır oluşturur.

n **tane işlem için amortize edilmiş maliyet şudur :**

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \right)$$

İki tarafı da topluyoruz…



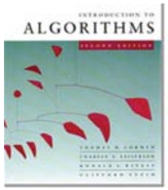
Amortize edilmiş maliyetler, gerçek maliyet için sınır oluşturur.

n **tane işlem için amortize edilmiş maliyet şudur :**

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

Seri teleskop gibi uzar…



Amortize edilmiş maliyetler, gerçek maliyet için sınır oluşturur.

n **tane işlem için amortize edilmiş maliyet şudur :**

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} c_i$$

$\Phi(D_n) \geq 0$ **ve** $\Phi(D_0) = 0$ **iken..**

Tabloyu ikiye katlamanın potansiyel analizi

$\Phi(D_i) = 2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}$ ile i'inci eklemeden sonra, tablonun potansiyelini tanımlayın. ($2^{\lceil \lg 0 \rceil} = 0$ olduğunu varsayın.)

Not :

- $\Phi(D_0) = 0$
- Bütün i' ler için $\Phi(D_i) \geq 0$

Örnek :

•	•	•	•	•	•		

$$\Phi = 2 \cdot 6 - 2^3 = 4$$

(

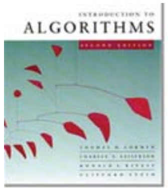
\$0	\$0	\$0	\$0	\$2	\$2		

Hesaplama Yöntemi)

Amortize edilmiş maliyetlerin hesaplanması

i'inci eklemenin maliyeti

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$



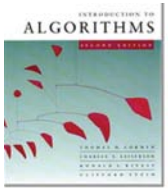
Amortize edilmiş maliyetlerin hesaplanması

i’inci eklemenin maliyeti

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} i & i\text{-}1,\ 2\text{’nin tam kuvveti ise,} \\ 1 & \text{değilse} \end{array} \right\}$$

$$+ \left(2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}\right) - \left(2(i-1) - 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}\right)$$



Amortize edilmiş maliyetlerin hesaplanması

i'inci eklemenin maliyeti

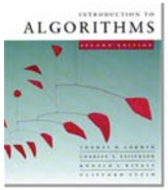
$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

$$= \begin{cases} i & i\text{-}1,\ 2\text{'nin tam kuvveti ise,} \\ 1 & \text{değilse} \end{cases}$$

$$+ \left(2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}\right) - \left(2(i-1) - 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}\right)$$

$$= \begin{cases} i & i\text{-}1,\ 2\text{'nin tam kuvveti ise,} \\ 1 & \text{değilse} \end{cases}$$

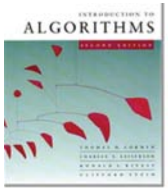
$$+ 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}.$$



Hesaplama

Durum 1 : *i-1*, 2'nin tam kuvvetidir.

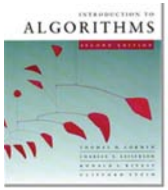
$$\hat{c}_i = i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}$$



Hesaplama

Durum 1 : i-1, 2'nin tam kuvvetidir.

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\ &= i + 2 - 2(i-1) + (i-1)\end{aligned}$$



Hesaplama

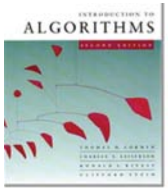
Durum 1 : i-1, 2'nin tam kuvvetidir.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\
&= i + 2 - 2(i-1) + (i-1) \\
&= i + 2 - 2i + 2 + i - 1
\end{aligned}
$$

Hesaplama

Durum 1 : i-1, 2'nin tam kuvvetidir.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\
&= i + 2 - 2(i-1) + (i-1) \\
&= i + 2 - 2i + 2 + i - 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$



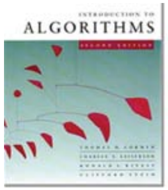
Hesaplama

Durum 1 : i-1, 2’nin tam kuvvetidir.

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\ &= i + 2 - 2(i-1) + (i-1) \\ &= i + 2 - 2i + 2 + i - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Durum 2 : i-1, 2’nin tam kuvveti değilse.

$$\hat{c}_i = 1 + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}$$



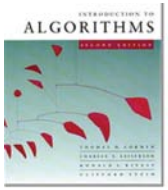
Hesaplama

Durum 1 : *i-1*, 2'nin tam kuvvetidir.

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\ &= i + 2 - 2(i-1) + (i-1) \\ &= i + 2 - 2i + 2 + i - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Durum 2 : *i-1*, 2'nin tam kuvveti değilse.

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= 1 + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\ &= 3 \qquad \left(2^{\lceil \lg i \rceil} = 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \text{ iken } \right)\end{aligned}$$



Hesaplama

Durum 1 : i-1, 2'nin tam kuvvetidir.

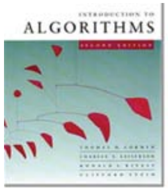
$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\ &= i + 2 - 2(i-1) + (i-1) \\ &= i + 2 - 2i + 2 + i - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Durum 2 : i-1, 2'nin tam kuvveti değilse.

$$\hat{c}_i = 1 + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}$$

$$= 3$$

n tane ekleme en kötü durumda $\Theta(n)$'ya mal olur.



Hesaplama

Durum 1 : i-1, 2’nin tam kuvvetidir.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\
&= i + 2 - 2(i-1) + (i-1) \\
&= i + 2 - 2i + 2 + i - 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Durum 2 : i-1, 2’nin tam kuvveti değilse.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= 1 + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

n tane ekleme en kötü durumda $\Theta(n)$’ya mal olur.

Egzersiz : Birinci eklemenin amortize edilmiş maliyetinin sadece 2 olduğunu, bu analizdeki hatayı bularak gösterin…

Sonuçlar

- Amortize edilmiş maliyetler, veri yapısı performansı ile ilgili açık bir soyutlama sağlar.

- Amortize edilmiş analiz kullanılırken, herhangi bir metod kullanılabilir. Ancak, her metodun daha basit ve özet kullanım durumları mevcuttur.

- Hesaplama metodunda veya Potansiyel metodunda, ciddi anlamda farklı sınırlar yaratan, amortize edilmiş maliyetlerin atanması için farklı şemalar bulunabilir.