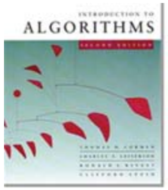


ARAYA YERLEŞTİR(x)

Herhangi bir x elemanını Atlama Listesine eklemek için:

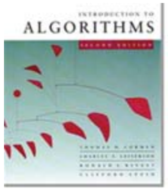
• x' in alt listede nereye denk geldiğini bulmak için ARA(x) yaparız.

• Her zaman en alt listede araya yerleştirme yaparız.

DEĞİŞMEZ : En alt liste bütün elemanları kapsar.

• Üstteki listelerden bazılarına araya yerleştirme yapabiliriz.

SORU : x'i başka hangi listelere eklemeliyiz?



ARAYA YERLEŞTİR (x)

SORU : x’i başka hangi listelerde araya yerleştirmeliyiz?

FİKİR : Yazı-tura atın, eğer YAZI gelirse; x’i bir üst seviyeye yükseltin ve tekrar yazı-tura atın.

- Bir sonraki seviyeye yükselme olasılığı = ½
- Ortalamada;
  - -Elemanların yarısı hiç seviye atlayamaz.
  - -Elemanların 1/4’ü 1 seviye atlar.
  - -Elemanların 1/8’i 2 seviye atlar.
  - -vs.

Yaklaşık olarak dengeli?

Atlama Listesi Örneği

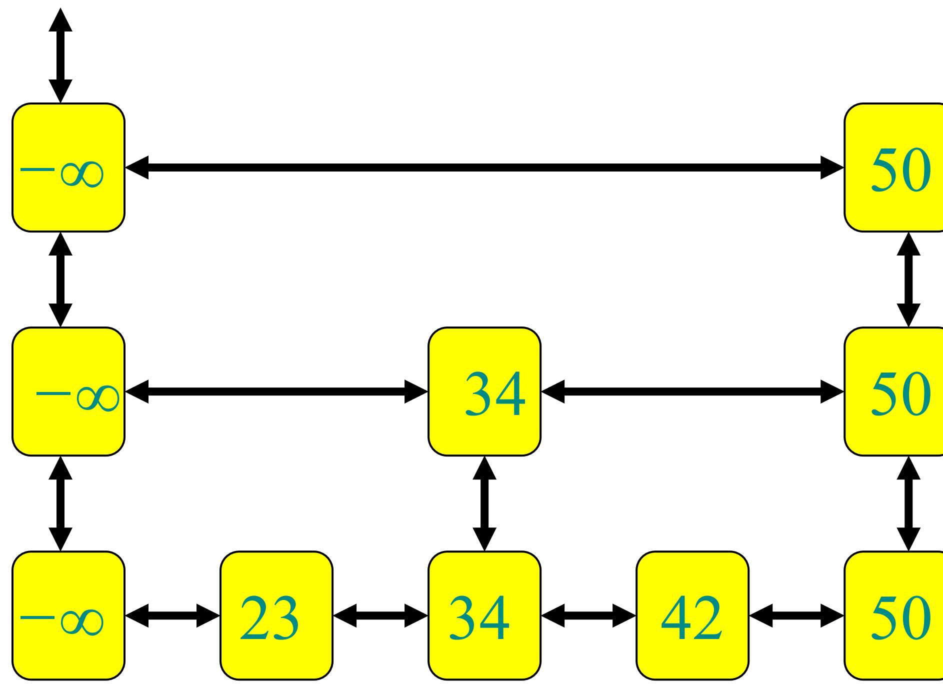
EGZERSİZ : Gerçek bir bozuk para kullanarak, tekrarlanan eklemelerle bir Atlama Listesi yaratın.

Ufak değişiklik :

• Özel $-\infty$ değerini

her listeye ekleyin.

$\Rightarrow$ Aynı algoritma ile arama yapabilirsiniz.

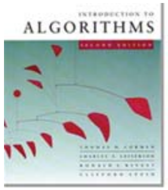


Atlama Listeleri

Boş bir yapıya ($-\infty$'u içeren) yapılan araya yerleştirmeler (ve silmeler) sonucunda oluşan yapı bir ***Atlama Listesi***dir.

- **AR. YER.** (x), rastgele yazı-tura yöntemiyle terfi düzeylerini belirler.

- **SİL**(x), x'in bulunduğu bütün listelerden x'i siler.



Atlama Listeleri

Boş bir yapıya ($-\infty$'u içeren) yapılan araya yerleştirmeler (ve silmeler) sonucunda oluşan yapı bir ***Atlama Listesi***dir.

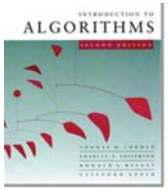
- AR. YER.(x), rastgele yazı-tura yöntemi ile üst seviyeye çıkışları belirler.

- SİL(x), x'in bulunduğu bütün listelerden x'i siler.

Atlama listeleri ne kadar iyidir? (hız/denge)

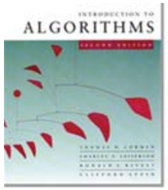
- SEZGİSEL OLARAK : Ortalamada oldukça iyi.

- İDDİA : Hemen her zaman gerçekten, ama gerçekten iyi.



"Yüksek Olasılıkla" Teoremi

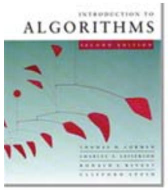
TEOREM : *"Yüksek Olasılıkla"*, n elemanlı bir atlama listesinde her bir arama $O(\lg n)$'ye mal olur.



"Yüksek Olasılıkla" Teoremi

TEOREM : *Yüksek olasılıkla*, n elemanlı bir atlama listesinde her bir arama $O(\lg n)$'e mal olur.

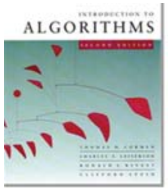
- **Gayri resmi olarak :** Eğer, herhangi bir $\alpha \geq 1$ için, uygun olan ve E olayının $1 - O(1/n^{\alpha})$ ihtimali ile gerçekleştiği bir seçim şansı varsa, E olayı **yüksek olasılıkla (y.o.)** gerçekleşir.
  - Aslında $O(\lg n)$ içindeki sabit, α'ya bağlıdır.
- **Resmi olarak :** Eğer, herhangi bir $\alpha \geq 1$ için, E_α'nın en azından $1\text{-}c_\alpha/n^{\alpha}$ ihtimali ile gerçekleşmesini sağlayan uygun sabit seçimleri varsa, E_α **yüksek olasılıkla** gerçekleşir.



"Yüksek Olasılıkla" Teoremi

TEOREM : *Yüksek olasılıkla*, n elemanlı bir atlama listesinde her bir arama $O(\lg n)$'e mal olur.

- **Gayri resmi olarak :** Eğer, herhangi bir $\alpha \geq 1$ için, uygun olan ve E olayının $1 - O(1/n^\alpha)$ ihtimali ile gerçekleştiği bir seçim şansı varsa, E olayı **yüksek olasılıkla (y.o.)** gerçekleşir.
- **FİKİR :** α'yı büyük seçerek (örneğin 100), hata olasılığını $O(1/n^\alpha)$ oldukça azaltabiliriz.
- Hemen hemen kesinlikle, sınırlar, varolan polinomsal zaman algoritmalarında kalacaklardır.



Boole'un Eşitsizliği / Birleşik Sınır

Hatırlatma :

Boole'un Eşitsizliği / Birleşik Sınır

Herhangi bir rastgele olay $E_1, E_2, \ldots, E_k$ için

$$\Pr\{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k\} \\ \le \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} + \ldots + \Pr\{E_k\}$$

Yüksek olasılıklı olaylarda uygulama:

Eğer $k = n^{O(1)}$ ise ve her E_i olayı yüksek olasılıkla oluşuyorsa, $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_k$

Çözümlemeye Isınma

GERÇEK : *Yüksek Olasılıkla,*

n elemanlı bir atlama listesinin $O(\lg n)$ düzeyi vardır.

KANIT :

- En fazla $c \lg n$ düzeyine sahip olmamızdaki hata ihtimali

$= \Pr\{c \lg n$ düzeyinden daha fazla$\}$.

$\leq n. \Pr\{\,x$ elemanı en az $c \lg n$ defa üste çıkmıştır$\}$.

(Boole'un eşitsizliği ile.)

$$= n \cdot (1/2^{c \lg n})$$
$$= n \cdot (1/n^c)$$
$$= 1/n^{c-1}$$

Çözümlemeye Isınma

GERÇEK : *Yüksek Olasılıkla,*

n elemanlı bir atlama listesinin $O(\lg n)$ düzeyi vardır.

KANIT :

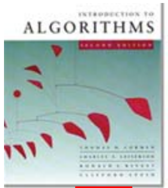
- En fazla $c \lg n$ düzeyine sahip olmamızdaki hata ihtimali

$\leq 1/n^{c-1}$

- Bu olasılık ***polinomsal olarak küçüktür***,

Örnek : en fazla $\alpha = c-1$ için n^{α}

- $O(\lg n)$ sınırındaki sabit c'yi uygun bir şekilde seçerek, α'yı keyfi olarak büyük yapabiliriz.



Teoremin İspatı

TEOREM : *Yüksek olasılıkla*, n elemanlı bir atlama listesinde her bir arama $O(\lg n)$'e mal olur.

AKILLICA FİKİR : Arama'yı tersten, yapraktan köke doğru yapmak.

- Arama yaprakta (en alttaki düğüm) başlar. (biter)
- Her düğüm ziyaret edilir:
  - Eğer düğüm bir üste çıkmadıysa (Tura geldiyse), sola gideriz. (soldan gelmiştik)
  - Eğer düğüm bir üste çıktıysa (Yazı geldiyse), yukarı gideriz, (yukarıdan gelmiştik)
- Arama kökte (veya $-\infty$'da) sona erer (başlar).

Teoremin İspatı

TEOREM : *Yüksek olasılıkla*, n elemanlı bir atlama listesinde her bir arama $O(\lg n)$'e mal olur.

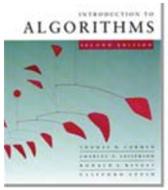
AKILLICA FİKİR : Arama'yı tersten, yapraktan köke doğru yapmak.

KANIT :

- Arama, köke ulaşana (veya $-\infty$'a) kadar yukarı ve sola ilerler.
- Yukarı hareket sayısı $<$ düzeylerin sayısı

  $\leq c \lg n$ y.o. ile (*Önkuram*)

- => y.o. ile, hareket sayısı en fazla $c \lg n$ kere YAZI gelmesi için fırlatmamız gereken para sayısıdır.



Para Atma Analizi

İDDİA: c lg n kere YAZI gelmesi için gereken para atma sayısı

$= \Theta(\lg n)$ y.o. ile

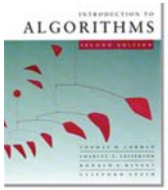
KANIT:

Açıkça $\Omega(\lg n)$: en az $c \lg n$

$O(\lg n)$'i "örnekle" kanıtlayın:

- Diyelim ki; $10\, c \lg n$ atma yaptık.
- En $c \lg n$ kere YAZI ne zaman gelir?

(Daha sonra 10'un rastgele değerlerine genelleyin.)



Para Atma Analizi

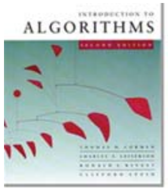
İDDİA: c lg n kere YAZI gelmesi için gereken para atma sayısı

$= \Theta(\lg n)$ y.o. ile

KANIT:

- $\Pr\{$tam olarak $c \lg n$ tane YAZI$\} = \underbrace{\binom{10c\lg n}{c\lg n}}_{\text{düzey}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{c\lg n}}_{\text{yazı}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{9c\lg n}}_{\text{tura}}$

$\Pr\{$ en fazla $c \lg n$ tane YAZI$\} \leq \underbrace{\binom{10c\lg n}{c\lg n}}_{\text{düzeylere aşırı değer biçimi}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{9c\lg n}}_{\text{tura}}$

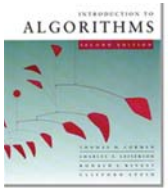


Para Atma Analizi (devam)

Sınırlarla ilgili hatırlatma: $\binom{y}{x}: \quad \left(\frac{y}{x}\right)^x \le \binom{y}{x} \le \left(e\frac{y}{x}\right)^x$

- Pr {en fazla $c \lg n$ YAZI}

$$
\begin{aligned}
&\le \binom{10c\lg n}{c\lg n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9c\lg n} \\
&\le \left(e\frac{10c\lg n}{c\lg n}\right)^{c\lg n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9c\lg n} \\
&= (10e)^{c\lg n} 2^{-9c\lg n} \\
&= 2^{\lg(10e)\cdot c\lg n} 2^{-9c\lg n} \\
&= 2^{[\lg(10e)-9]\cdot c\lg n} \\
&= 1/n^{\alpha} \text{ için } \alpha = [9-\lg(10e)]\cdot c
\end{aligned}
$$



Para Atma Analizi (devam)

- Pr {en fazla $c \lg n$ TURA} $\leq 1/n^{\alpha}$, ($\alpha = [9 - \lg(10e)]c$)

- **ANAHTAR ÖZELLİK:** herhangi bir c için $10 \to \infty$'ki gibi $\alpha \to \infty$

- 10'a ayarlayın, örnek, $O(\lg n)$ sınırında bir sabit, istenen α'ya denk geliyor.

Bu para atma iddiasının ve teoremin kanıtını tamamlıyor.