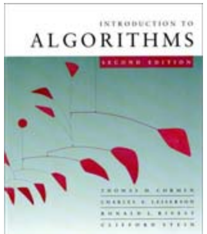
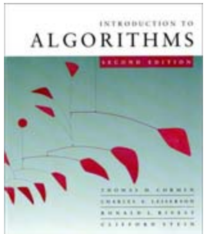
(Boğum i' yi araya yerleştirmek için
gerekli karşılaştırmaların sayısı)



Rastgele yapılanmış bir ikili arama ağacının yüksekliği

Çözümlemenin ana hatları:

- ***Jensen'in eşitsizliğini***, kanıtlayın;yani: Her dışbükey fonksiyon f ve rastgele değişken X için $f(E[X]) \le E[f(X)]$ olduğunu kanıtlayın.
- Rastgele yapılanmış bir BST'de ***üstel yüksekliği*** n boğum için çözümleyin; burada rastgele değişken $Y_n = 2^{X_n}$ 'dir, ve X_n ağacın yüksekliğini tanımlayan rastgele değişkendir.
- Şunu kanıtlayın: $2^{E[X_n]} \le E[2^{X_n}] = E[Y_n] = O(n^3)$, ve böylece $E[X_n] = O(\lg n)$ çıksın.

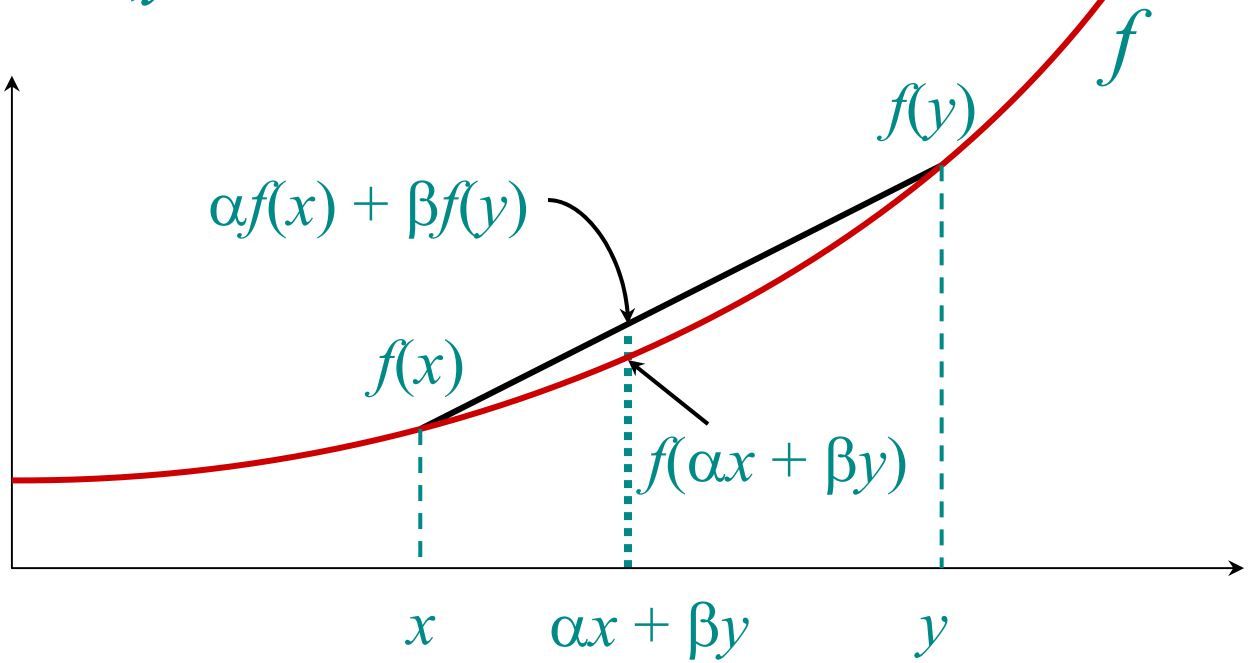


Dışbükey fonksiyonlar

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ***dışbükeydir***; eğer tüm $\alpha, \beta \geq 0$ öyle ki $\alpha + \beta = 1$, ve

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

tüm $x, y \in \mathbb{R}$ ise.

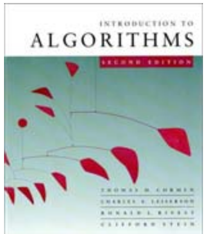


Dışbükeylik önkuramı

Önkuram. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun, ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ negatif olmayan gerçek sayılar olsun; öyle ki $\sum_k \alpha_k = 1$. Bu durumda, herhangi bir gerçek sayı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ için:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)\,.\text{ olur.}$$

Kanıtlama. n kullanarak tümevarımla. $n = 1$ için $\alpha_1 = 1$, ve böylece $f(\alpha_1 x_1) \le \alpha_1 f(x_1)$ olur.



Kanıtlama (devamı)

Tümevarım adımı:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right)$$

Cebir.

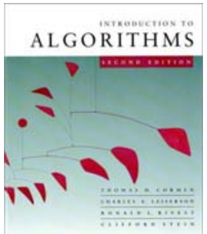
Kanıtlama (devamı)

Tümevarım adımı:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right)$$

$$\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right)$$

Dışbükeylik.

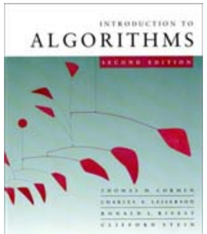


Kanıtlama (devamı)

Tümevarım adımı:

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right) &= f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right) \\
&\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right) \\
&\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}f(x_k)
\end{aligned}
$$

Tümevarım.



Kanıtlama (devamı)

Tümevarım adımı:

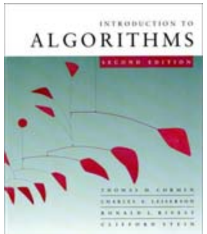
$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right)$$

$$\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right)$$

$$\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}f(x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(x_k). \quad \square$$

Cebir.

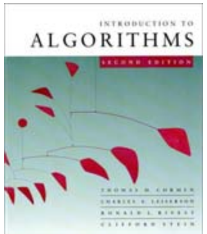


Dışbükeylik önkuramı: sonsuz durum

Önkuram. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir dışbükey fonksiyon ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ negatif olmayan gerçek sayılar olsun; öyle ki $\sum_k \alpha_k = 1$. Bu koşullarda, her gerçek sayı $x_1, x_2, \ldots,$ için:

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k)$$,olur;

bu toplamların var olduğu farz edildiğinde..



Dışbükeylik önkuramı: sonsuz durum

Kanıt. Dışbükeylik önkuramı gereği, her $n \geq 1$ için,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} f(x_k) \; .$$

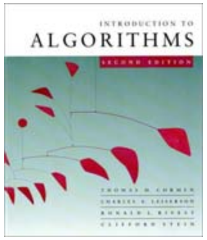
Dışbükeylik önkuramı: sonsuz durum

Kanıt. Dışbükeylik önkuramı gereği, her $n \geq 1$ için,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} f(x_k)\ .$$

Her iki tarafta da limit alma işlemi yaparak (eşitsizlik kesin olmadığından bunu yapabiliriz):

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}_{\to 1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}_{\to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}_{\to 1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)}_{\to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k)} \quad \square$$



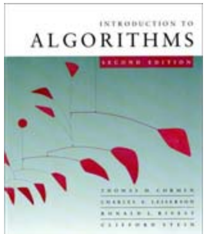
Jensen'in eşitsizliği

Ön kuram. f bir dışbükey fonksiyon ve X rastgele bir değişken olsun. Öyleyse, $f(E[X]) \le E[f(X)]$.

Kanıt.

$$f(E[X]) = f\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot \Pr\{X = k\}\right)$$

Umulanın tanımı.



Jensen’in eşitsizliği

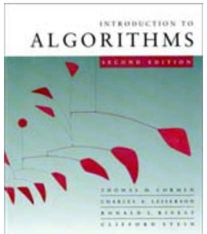
Lemma. f bir dışbükey fonksiyon ve X rastgele bir değişken olsun. Öyleyse, $f(E[X]) \le E[f(X)]$.

Kanıt.

$$f(E[X]) = f\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot \Pr\{X = k\}\right)$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot \Pr\{X = k\}$$

Dışbükeylik önkuramı (sonsuz durum).



Jensen’in eşitsizliği

Önkuram. f bir dışbükey fonksiyon ve X rastgele bir değişken olsun. Öyleyse, $f(E[X]) \le E[f(X)]$.

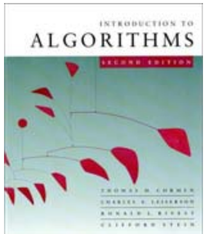
Kanıt.

$$f(E[X]) = f\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot \Pr\{X = k\}\right)$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot \Pr\{X = k\}$$

$$= E[f(X)]. \quad \square$$

Şaşırtıcı, ama doğru adım—bunu düşünün.



BST yüksekliği çözümlemesi

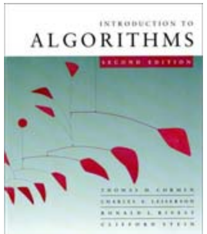
X_n rastgele yapılanmış ikili arama ağacının n boğumlu durumunun yüksekliğini tanımlayan rastgele değişken olsun, ve $Y_n = 2^{X_n}$ de ağacın üstel yüksekliği olsun.

Ağacın kökünün rütbesi k ise,

$$X_n = 1 + \max\{X_{k-1}, X_{n-k}\} \text{ dir,}$$

çünkü kökün hem sağ hem de sol alt ağaçları rastgele yapılanmıştır. Bu nedenle,

$$Y_n = 2\cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\} \text{ olur.}$$



Çözümleme (devamı)

Göstergesel rastgele değişken Z_{nk} 'yi tanımlayın:

$$Z_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{eğer kökün rütbesi } k \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

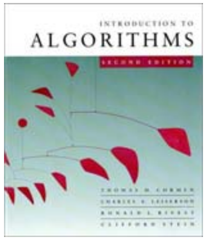
Böylece, $\Pr\{Z_{nk} = 1\} = \mathrm{E}[Z_{nk}] = 1/n$, ve

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{nk} \left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right) .$$

Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

Her iki tarafın umulanını alın.

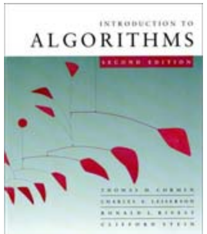


Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

Umulanın doğrusallığı.



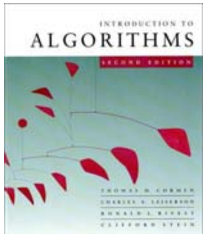
Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}] \cdot E[\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}]$$

Kökün rütbesinin alt ağaçların köklerinin rütbelerinden bağımsızlığı.



Üstel yükseklik yinelemesi

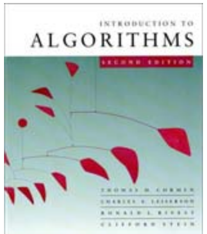
$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2\cdot\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[Z_{nk}\left(2\cdot\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}]\cdot E[\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}]$$

$$\le \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E[Y_{k-1} + Y_{n-k}]$$

İki negatif olmayan sayının en büyük değeri en çok toplamları olabilir ve $\mathrm{E}[Z_{nk}] = 1/n$.



Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

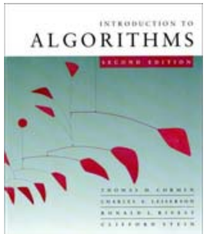
$$= \sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}] \cdot E[\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}]$$

$$\le \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E[Y_{k-1} + Y_{n-k}]$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$

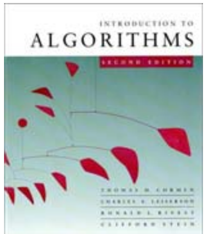
Her terim iki kez görünür; yeniden dizin oluşturun.



Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir c sabiti için, $E[Y_n] \leq cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada c' yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$E[Y_n] = \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$



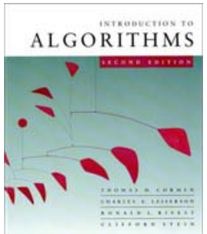
Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir c sabiti için $E[Y_n] \le cn^3$ olduğunu göstermek için, yerine koyma metodunu kullanın; burada c' yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$E[Y_n] = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$

$$\le \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} ck^3$$

Yerine koyma.



Yinelemeyi çözmek

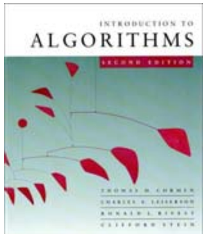
Artı değerli bir c sabiti için $E[Y_n] \le cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada c 'yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$E[Y_n] = \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$

$$\le \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3$$

$$\le \frac{4c}{n}\int_0^n x^3 dx$$

Entegral metodu.

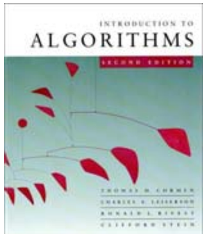


Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir c sabiti için $E[Y_n] \le cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada c' yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$
\begin{aligned}
E[Y_n] &= \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k] \\
&\le \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3 \\
&\le \frac{4c}{n}\int_0^n x^3\,dx \\
&= \frac{4c}{n}\left(\frac{n^4}{4}\right)
\end{aligned}
$$

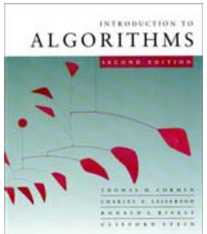
Entegrali çözün.



Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir c sabiti için, $E[Y_n] \le cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada c'yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$
\begin{aligned}
E[Y_n] &= \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k] \\
&\le \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3 \\
&\le \frac{4c}{n}\int_0^n x^3\,dx \\
&= \frac{4c}{n}\left(\frac{n^4}{4}\right) \\
&= cn^3. \quad \text{Algebra.}
\end{aligned}
$$



Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

$$2^{E[X_n]} \leq E[2^{X_n}] \text{ yani}$$

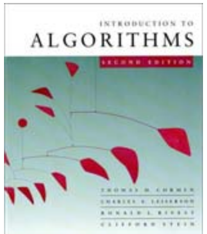
Jensen'in eşitsizliği çıkar, çünkü $f(x) = 2^x$ dışbükeydir.

Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

$$\begin{aligned} 2^{E[X_n]} &\le E[2^{X_n}] \\ &= E[Y_n] \end{aligned}$$

Tanımlama.



Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

$$
\begin{aligned}
2^{E[X_n]} &\le E[2^{X_n}] \\
&= E[Y_n] \\
&\le cn^3 .
\end{aligned}
$$

Biraz önce gösterdiğimiz şey.

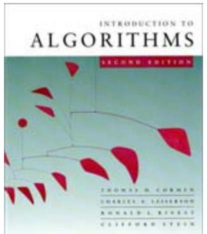
Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

$$
\begin{aligned}
2^{E[X_n]} &\le E[2^{X_n}] \\
&= E[Y_n] \\
&\le cn^3 .
\end{aligned}
$$

Her iki tarafta lg oalındığında sonuç:

$$E[X_n] \le 3 \lg n + O(1) .$$



Süreç sonrası

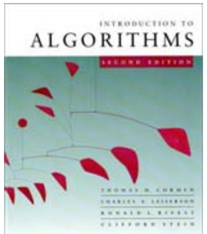
Q. Çözümleme bu denli zor olmalı mı?

Q. Üstel yüksekliğin çözümlenmesiyle neden uğraşmalı?

Q. Neden yinelemeyi direkt olarak

$$X_n = 1 + \max\{X_{k-1}, X_{n-k}\}$$

üzerinden geliştirmemeli?



S¿re- sonrasē (devamē)

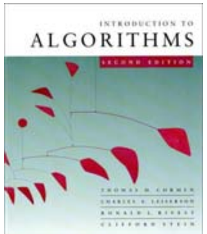
A.

$$\max\{a, b\} \le a + b \text{ eşitsizliği}$$

zayıf bir üst sınır sağlar, çünkü $|a - b|$ büyüdükçe sağ altağaç sol alt ağaca yavaş yaklaşır.

$$\max\{2^a, 2^b\} \le 2^a + 2^b$$

sınırlaması olduğunda $|a - b|$ büyüdükçe sağ alt ağacın sol altağaca yaklaşması hızlanır. Jensen'in eşitsizliği kapsamında $f(x) = 2^x$ 'in dışbükeyliğini kullanıp, üstellerin toplamıyla işlem yaparak sıkı bir çözümleme elde edebiliriz.



Thought exercises

- Çözümlemeyi ne olacağını görmek için doğrudan X_n kullanarak yapın.
- Kanıtlamada neden üstellerin kullanıldığını iyi anlamaya çalışın. 4. kuvvet işe yarar mıydı?
- Daha da basit bir kanıt bulabilir misiniz? (İşlediğimiz kanıt kitaptakinden biraz daha basit — umarım doğrudur!)

