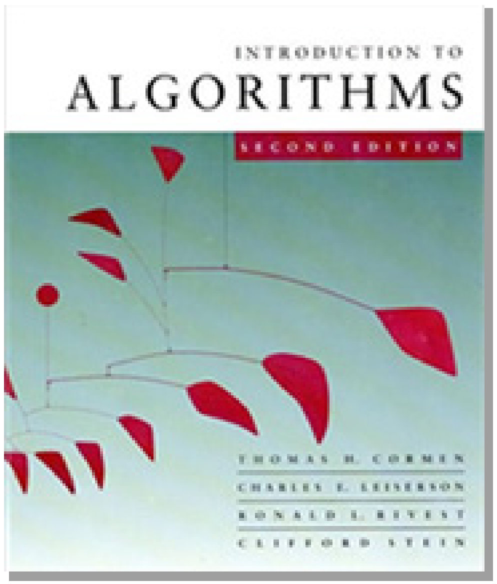
# *Algoritmalara Giriş*

## 6.046J/18.401J

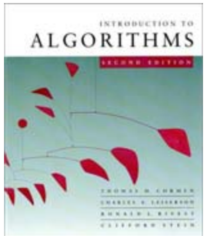



## DERS 9

**Rastgele yapılanmış ikili arama ağaçları**

- Beklenen düğüm derinliği
- Yüksekliği çözümlemek
  - Dışbükeylik önkuramı
  - Jensen’in eşitsizliği
  - Üstel yükseklik
- Post mortem (süreç sonrası)

**Prof. Erik Demaine**




# İkili-arama-ağacı sıralaması

$T \leftarrow \varnothing$      $i = 1$ den $n$' ye kadar değiştiğinde,

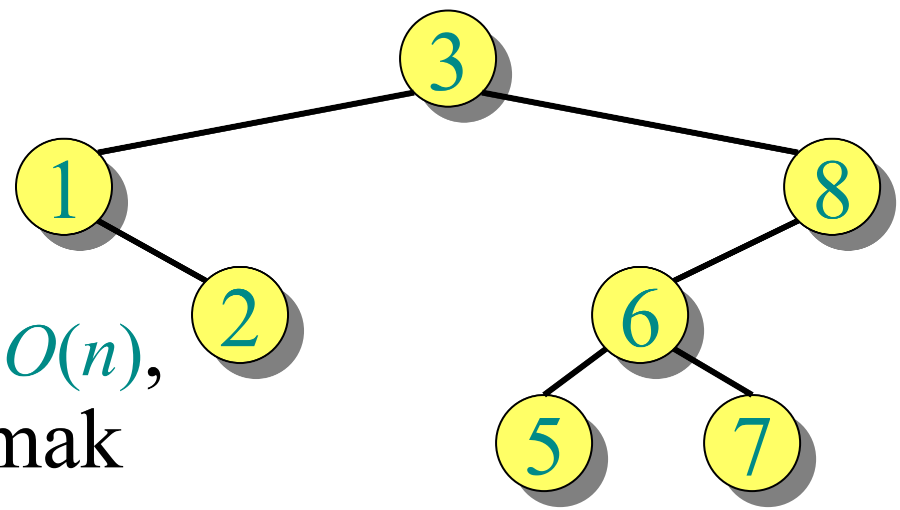
▷ Boş bir BST(ikili arama ağacı) yarat.

AĞAÇ ARAYA YERLEŞTİRMESİ **YAP** $(T, A[i])$

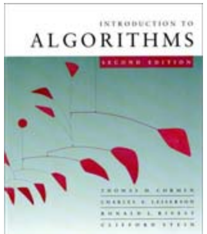
$T$ 'nin içinde sıralı adımlama yap.

**Örnek:**

$A = [3\ 1\ 8\ 2\ 6\ 7\ 5]$

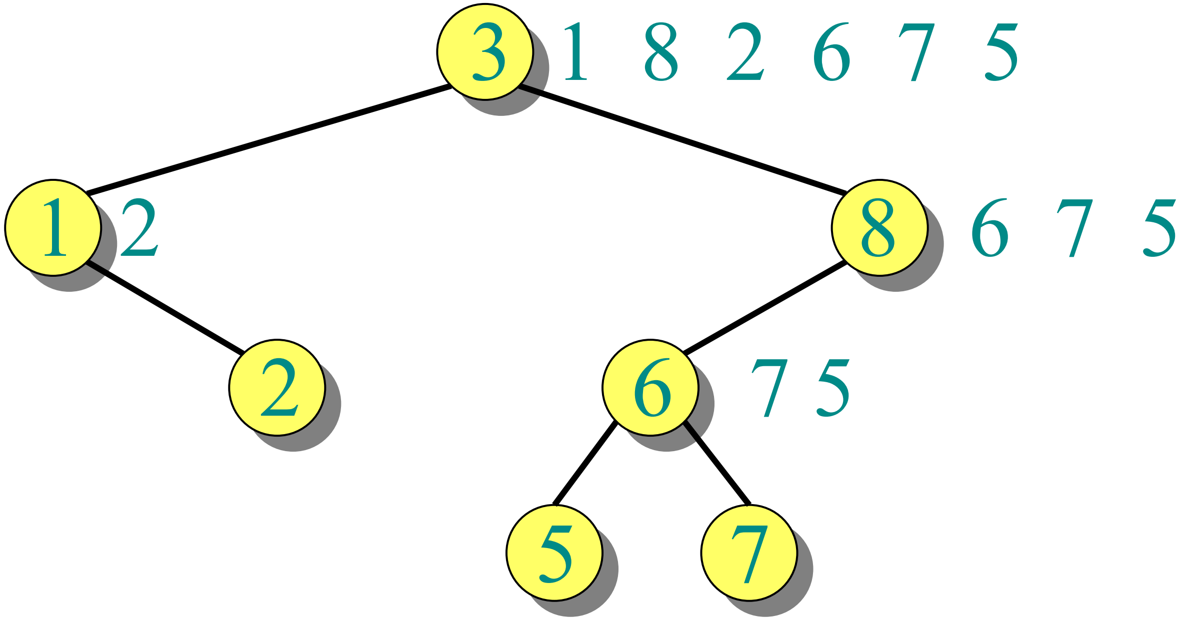



Ağaç adımlama süresi $= O(n)$, ancak BST'yi oluşturmak ne kadar zaman alır?

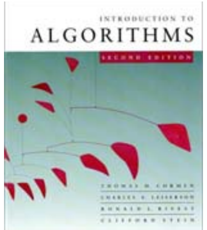



# BST sıralaması çözümlemesi

BST sıralaması çabuk sıralama karşılaştırmalarının aynısını, başka bir düzende yapar!




Ağacı oluşturmanın beklenen süresi asimptotik olarak çabuk sıralamanın koşma süresinin aynıdır.




# Düğüm derinliği

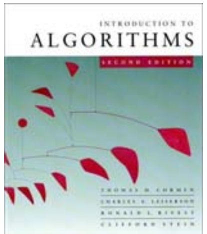
Bir düğüm derinliği = AĞAÇ ARAYA YERLEŞTİRMESİ için yapılan karşılaştırmalar. Tüm girdi permütasyonları eşit olasılıklı varsayılırsa:

Ortalama düğüm derinliği

$$= \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} (\text{Boğum i' yi araya yerleştirmek için gerekli karşılaştırmaların sayısı})\right]$$

$$= \frac{1}{n} O(n \lg n)$$ (Çabuk sıralama analizi)

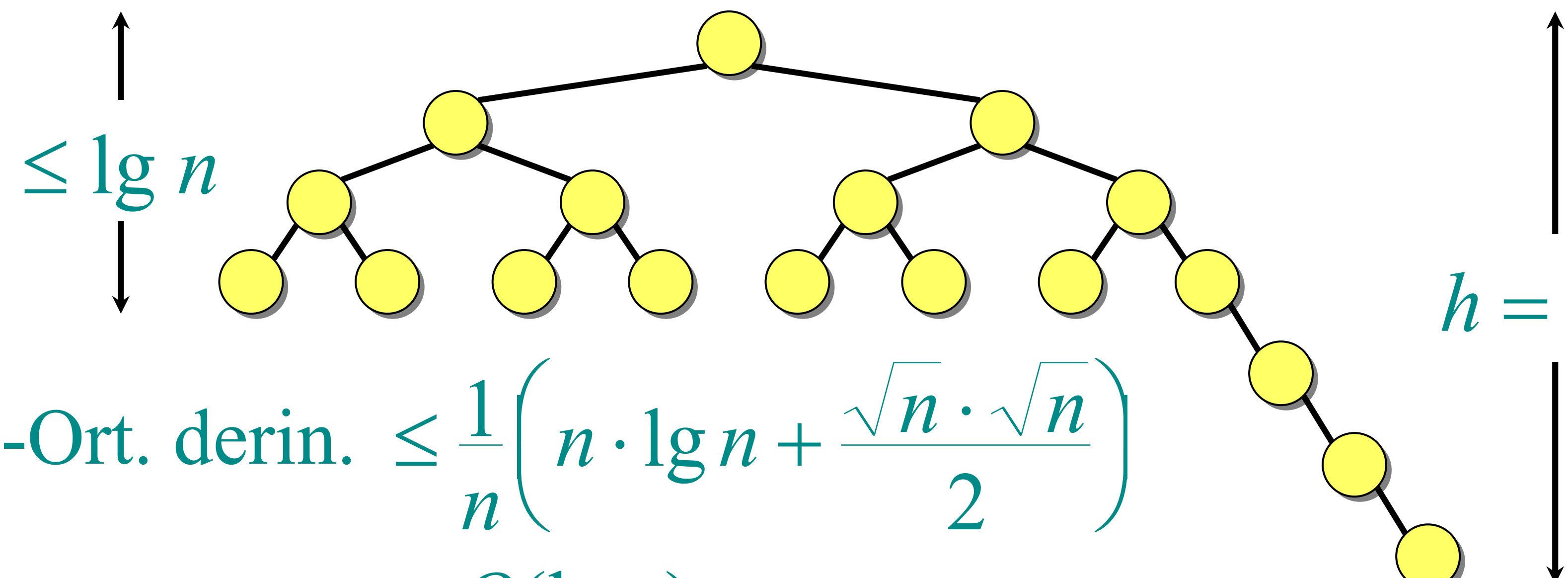
$$= O(\lg n) .$$




# Ağacın beklenen yüksekliği

Ama, ortalama düğüm derinliğinin rastgele yapılanmış bir ikili arama ağacında (BST) $= O(\lg n)$ olması ağacın beklenen yüksekliğinin de $O(\lg n)$ olduğu anlamına gelmeyebilir (buna rağmen öyledir).

**Örnek.**



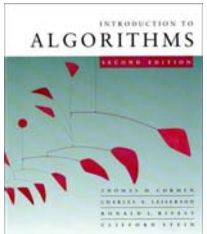

$$\text{-Ort. derin.} \leq \frac{1}{n}\left(n \cdot \lg n + \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{2}\right) = O(\lg n)$$

# Rastgele yapılanmış bir ikili arama ağacının yüksekliği

**Çözümlemenin ana hatları:**

- ***Jensen'in eşitsizliği***ni, kanıtlayın; yani: Her dışbükey fonksiyon $f$ ve rastgele değişken $X$ için $f(E[X]) \le E[f(X)]$ olduğunu kanıtlayın.
- Rastgele yapılanmış bir BST'de ***üstel yüksekliği*** $n$ düğüm için çözümleyin; burada rastgele değişken $Y_n = 2^{X_n}$ 'dir, ve $X_n$ ağacın yüksekliğini tanımlayan rastgele değişkendir.
- Şunu kanıtlayın: $2^{E[X_n]} \le E[2^{X_n}] = E[Y_n] = O(n^3)$ olsun ve böylece $E[X_n] = O(\lg n)$ çıksın.

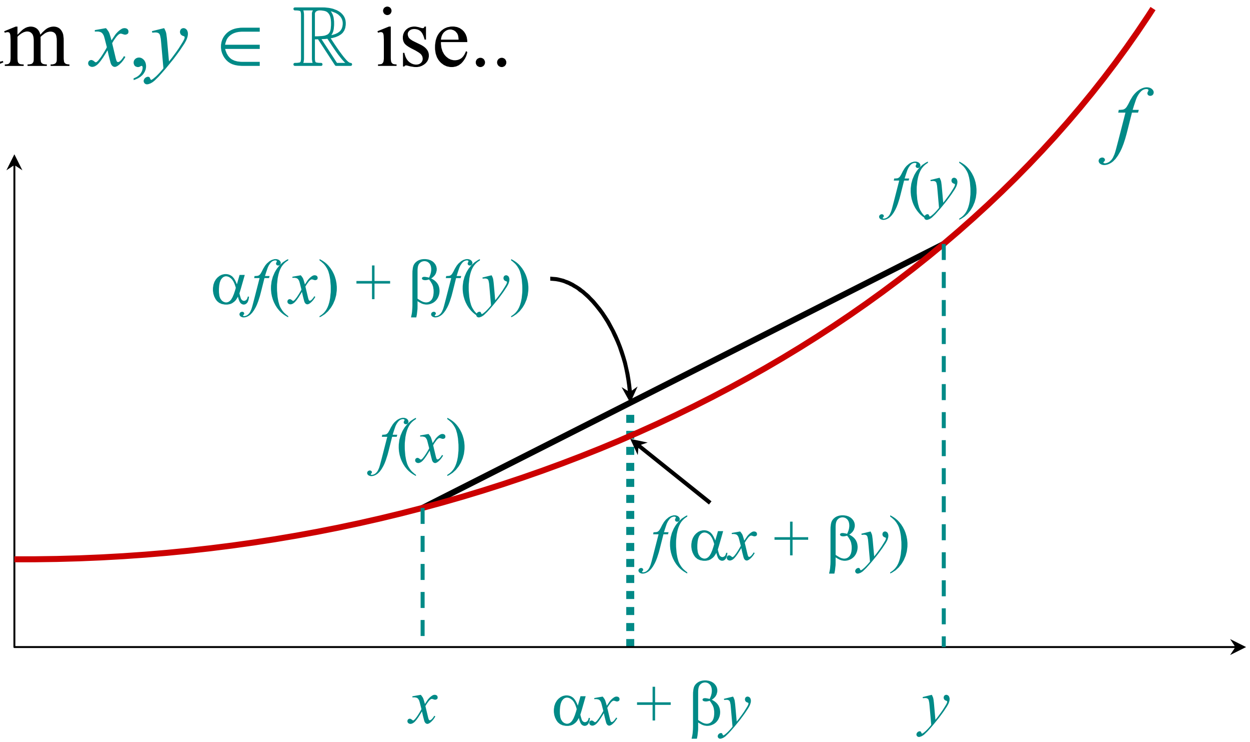



# Dışbükey fonksiyonlar

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ***dışbükeydir***; eğer tüm $\alpha, \beta \geq 0$ ise.. Ayrıca $\alpha + \beta = 1$ ve

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

tüm $x, y \in \mathbb{R}$ ise..

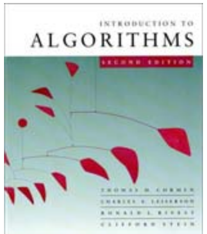


# Dışbükeylik önkuramı

**Önkuram.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun, ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ negatif olmayan gerçek sayılar olsun; öyle ki $\sum_k \alpha_k = 1$'dir. Bu durumda, herhangi bir gerçek sayı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ için:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \text{ olur.}$$

*Kanıtlama.* $n$ kullanarak tümevarımla. $n = 1$ için $\alpha_1 = 1$, ve böylece $f(\alpha_1 x_1) \le \alpha_1 f(x_1)$ olur.

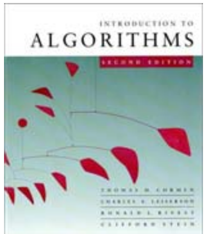



# Kanıtlama (devamı)

Tümevarım adımı:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} x_k\right)$$

Cebir.




# Kanıtlama (devamı)

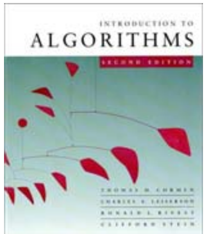
Tümevarım adımı:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right)$$

$$\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\right)$$

Dışbükeylik.



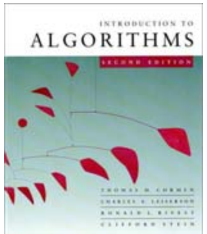

# Kanıtlama (devamı)

Tümevarım adımı:

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) &= f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} x_k\right) \\
&\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} x_k\right) \\
&\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} f(x_k)
\end{aligned}
$$

Tümevarım.

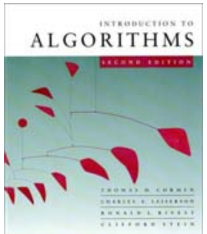



# Kanıtlama (devamı)

Tümevarım adımı:

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) &= f\left(\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} x_k\right) \\
&\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} x_k\right) \\
&\le \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} f(x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Cebir.




# Dışbükeylik önkuramı: sonsuz durum

**Önkuram.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir dışbükey fonksiyon ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ negatif olmayan gerçek sayılar olsun; öyle ki $\sum_k \alpha_k = 1$. Bu koşullarda, her gerçek sayı $x_1, x_2, \ldots,$ için:

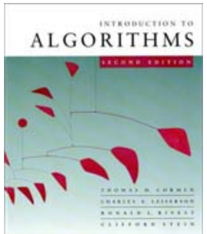
$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k) \quad \text{olur;}$$

bu toplamların var olduğu farz edildiğinde..

# Dışbükeylik önkuramı: sonsuz durum

*Kanıt.* Dışbükeylik önkuramı gereği, her $n \geq 1$ için,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} f(x_k)\ .$$




# Dışbükeylik önkuramı: sonsuz durum

*Kanıt.* Dışbükeylik önkuramı gereği, her $n \geq 1$ için,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} f(x_k)\,.$$

Her iki tarafta da limit alma işlemi yaparak (eşitsizlik kesin olmadığından bunu yapabiliriz):

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}_{\to 1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}_{\to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}_{\to 1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)}_{\to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k)} \qquad \blacksquare$$

# Jensen'in eşitsizliği

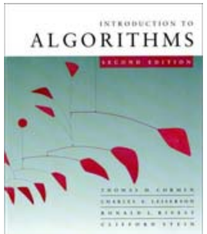
**Önkuram.** $f$ bir dışbükey fonksiyon ve $X$ rastgele bir değişken olsun. Öyleyse, $f(E[X]) \le E[f(X)]$' dir.

*Kanıt.*

$$f(E[X]) = f\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot \Pr\{X = k\}\right)$$

Beklenenin tanımı.




# Jensen'in eşitsizliği

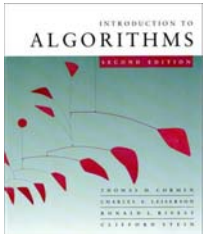
**Önkuram.** $f$ bir dışbükey fonksiyon ve $X$ rastgele bir değişken olsun. Öyleyse, $f(E[X]) \le E[f(X)]$'dir.

*Kanıt.*

$$f(E[X]) = f\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot \Pr\{X = k\}\right)$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot \Pr\{X = k\}$$

Dışbükeylik önkuramı (sonsuz durum).




# Jensen'in eşitsizliği

**Önkuram.** $f$ bir dışbükey fonksiyon ve $X$ rastgele bir değişken olsun. Öyleyse, $f(E[X]) \leq E[f(X)]$'dir.

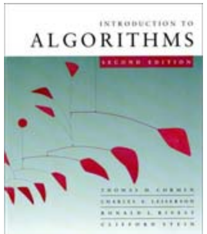
*Kanıt.*

$$f(E[X]) = f\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot \Pr\{X = k\}\right)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot \Pr\{X = k\}$$

$$= E[f(X)]. \quad \square$$

Şaşırtıcı, ama doğru adım - bunu düşünün.




# BST yüksekliği çözümlemesi

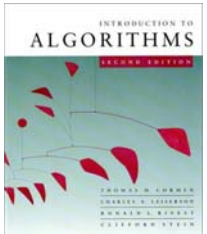
$X_n$ rastgele yapılanmış ikili arama ağacının $n$ düğümlü durumunun yüksekliğini tanımlayan rastgele değişken olsun, ve $Y_n = 2^{X_n}$ de ağacın üstel yüksekliği olsun.

Ağacın kökünün rankı (rütbesi) $k$ ise,

$$X_n = 1 + \max\{X_{k-1}, X_{n-k}\} \text{ dir,}$$

çünkü kökün hem sağ hem de sol alt ağaçları rastgele yapılanmıştır. Bu nedenle,

$$Y_n = 2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\} \text{ olur.}$$



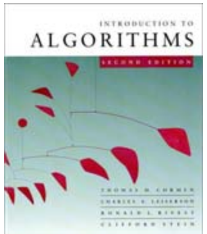

# Çözümleme (devamı)

Göstergesel rastgele değişken $Z_{nk}$ 'yi tanımlayın:

$$Z_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{eğer kökün rütbesi } k \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Böylece, $\Pr\{Z_{nk} = 1\} = \mathrm{E}[Z_{nk}] = 1/n$, ve

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right) .$$

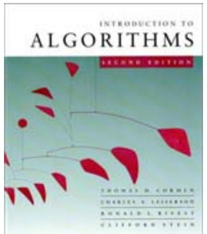



# Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

Her iki tarafın beklenenini alın.



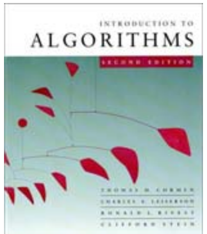

# Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

Beklenenin doğrusallığı.




# Üstel yükseklik yinelemesi

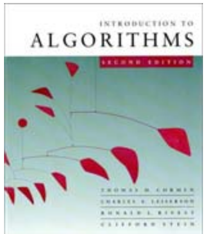
$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}] \cdot E[\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}]$$

Kökün rankının alt ağaçların köklerinin ranklarından bağımsızlığı.




# Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}(2 \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\})]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}] \cdot E[\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}]$$

$$\le \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E[Y_{k-1} + Y_{n-k}]$$

İki negatif olmayan sayının en büyük değeri en çok toplamları olabilir ve $\mathrm{E}[Z_{nk}] = 1/n$.

# Üstel yükseklik yinelemesi

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} Z_{nk}\left(2\cdot\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)\right]$$

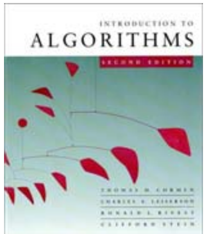
$$= \sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}\left(2\cdot\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right)]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} E[Z_{nk}]\cdot E[\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}]$$

$$\le \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E[Y_{k-1} + Y_{n-k}]$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$

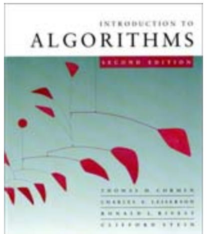
Her terim iki kez görünür; yeniden dizin oluşturun.




# Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir $c$ sabiti için, $E[Y_n] \le cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada $c$' yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$E[Y_n] = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$



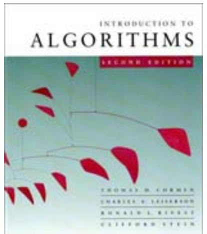

# Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir $c$ sabiti için, $E[Y_n] \leq cn^3$ olduğunu göstermek için, yerine koyma metodunu kullanın; burada $c$' yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$E[Y_n] = \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$

$$\leq \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3$$

Yerine koyma.




# Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir $c$ sabiti için, $E[Y_n] \le cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada $c'$ yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$E[Y_n] = \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k]$$

$$\le \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3$$

$$\le \frac{4c}{n}\int_0^n x^3 dx$$

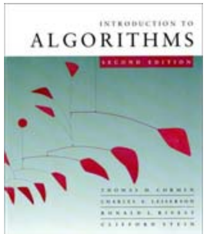
Entegral metodu.

# Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir $c$ sabiti için, $E[Y_n] \leq cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada $c$' yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$
\begin{aligned}
E[Y_n] &= \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k] \\
&\leq \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3 \\
&\leq \frac{4c}{n}\int_0^n x^3\,dx \\
&= \frac{4c}{n}\left(\frac{n^4}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Entegrali çözün.

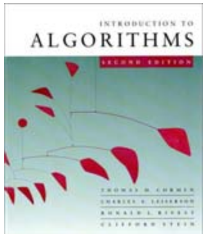



# Yinelemeyi çözmek

Artı değerli bir $c$ sabiti için, $E[Y_n] \le cn^3$ olduğunu gösterirken yerine koyma metodunu kullanın; burada $c$' yi ilk durum koşullarını sağlaması için yeterince büyük seçebiliriz.

$$
\begin{aligned}
E[Y_n] &= \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[Y_k] \\
&\le \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3 \\
&\le \frac{4c}{n}\int_0^n x^3\,dx \\
&= \frac{4c}{n}\left(\frac{n^4}{4}\right) \\
&= cn^3.
\end{aligned}
$$

Algebra.
(cebir)



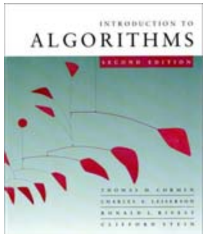

# Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

yani $2^{E[X_n]} \le E[2^{X_n}]$

Jensen'in eşitsizliği çıkar, çünkü $f(x) = 2^x$ dışbükeydir.



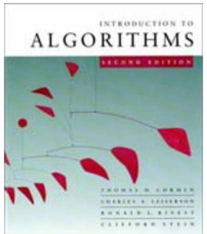

# Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

$$2^{E[X_n]} \leq E[2^{X_n}]$$
$$= E[Y_n]$$

Tanımlama.




# Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

$$\begin{aligned} 2^{E[X_n]} &\le E[2^{X_n}] \\ &= E[Y_n] \\ &\le cn^3 . \end{aligned}$$

Biraz önce gösterdiğimiz şey.

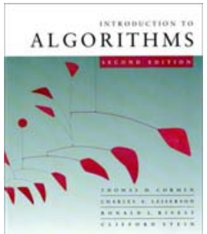
# Büyük final

Herşey bir araya getirilirse,

$$\begin{aligned} 2^{E[X_n]} &\le E[2^{X_n}] \\ &= E[Y_n] \\ &\le cn^3 . \end{aligned}$$

Her iki tarafta lg alındığında sonuç:

$E[X_n] \le 3 \lg n + O(1)$ olur.




# Süreç sonrası

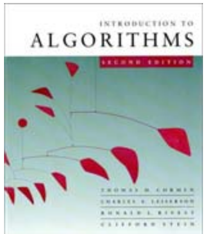
**S.** Çözümleme bu denli zor olmalı mı?

**S.** Üstel yüksekliğin çözümlenmesiyle neden uğraşmalı?

**S.** Neden yinelemeyi direkt olarak

$$X_n = 1 + \max\{X_{k-1}, X_{n-k}\}$$

üzerinden geliştirmemeli?




# Süreç sonrası (devamı)

**C.**

$\max\{a, b\} \le a + b$ eşitsizliği zayıf bir üst sınır sağlar, çünkü $|a - b|$ büyüdükçe sağ altağaç, sol altağaca yavaş yaklaşır.

$$\max\{2^a, 2^b\} \le 2^a + 2^b$$

sınırlaması olduğunda $|a - b|$ büyüdükçe sağ alt ağacın sol altağaca yaklaşması hızlanır. Jensen'in eşitsizliği kapsamında $f(x) = 2^x$ 'in dışbükeyliğini kullanıp, üstellerin toplamıyla işlem yaparak sıkı bir çözümleme elde edebiliriz.

# Düşünce egzersizleri

- Çözümlemeyi ne olacağını görmek için doğrudan $X_n$ kullanarak yapın.
- Kanıtlamada neden üstellerin kullanıldığını iyi anlamaya çalışın. 4. kuvvet işe yarar mıydı?
- Daha da basit bir kanıt bulabilir misiniz? (İşlediğimiz kanıt kitaptakinden biraz daha basit — umarım doğrudur!).