(b) S'yi, p Є S olan bir sabit elemanla S: $S_1 = \{x \in S \mid x \le p\}$ ve $S_2 = \{x \in S \mid x \ge p\}$ olacak şekilde iki alt kümeye bölüntülediğimizi varsayalım.

Bu ikisinden birini kanıtlayın.

1. x, y Є S_1 olan yakın her çift, aynı zamanda S'de de yakın sayılardır, veya
2. x, y Є S_2 olan yakın her çift, aynı zamanda S'de de yakın sayılardır.

k Є {1, 2} için, x, y Є S_k olan her yakın sayı çiftinin S'de de yakın olduğunun, O(n) süresinde nasıl belirlenebileceğini gösterin.

Çözüm: Genellemeyi kaybetmeden, S_i'deki elemanların sıralı olduğunu varsayalım. k = 1, 2 için, a_k, S_k'daki iki ardışık sayı arasındaki ortalama uzaklık olsun. n_k da S_k'daki eleman sayısı olsun. Bölüm (a)'daki sonucu kullanırsak

$$a_1 = \frac{1}{n_1 - 1}\left(\max_{z\in S_1} z - \min_{z\in S_1} z\right) = \frac{1}{n_1 - 1}\left(p - \min_{z\in S} z\right)$$

ve

$$a_2 = \frac{1}{n_2 - 1}\left(\max_{z\in S_2} z - \min_{z\in S_2} z\right) = \frac{1}{n_2 - 1}\left(\max_{z\in S} z - p\right)$$

elde ederiz. Sıralı olan S'deki iki ardışık sayı arasındaki uzaklık a ise;

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{n-1}\left(\max_{z\in S} z - \min_{z\in S} z\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(p - \min_{z\in S} z\right) + \frac{1}{n-1}\left(\max_{z\in S} z - p\right) \\ &= \frac{n_1 - 1}{n-1}a_1 + \frac{n_2 - 1}{n-1}a_2. \end{aligned}$$

$n_1 + n_2 = n + 1$ olduğunu unutmayın. Çünkü, p hem S_1 hem de S_2'de yer almakta. Dolayısıyla a, a_1 ve a_2'nin ağırlıklı ortalamasıdır.

$\alpha = (n_2 - 1)/(n - 1)$ iken;

$$a = (1 - \alpha)a_1 + \alpha\, a_2,$$

$a_1 \le a_2$ olduğunu düşünürsek ve x ve y S_1'de yakın sayılar ise;

$$|x - y| \le a_1 = (1-\alpha)a_1 + \alpha a_1 \le (1-\alpha)a_1 + \alpha a_2 = a.$$

Bu, S_1'deki her yakın sayı çiftinin aynı zamanda S'de de yakın olduğunu ifade eder. Benzer şekilde eğer $a_2 \le a_1$ ise, S_2'deki her yakın sayı çifti S'de de yakındır.
S_k'daki en küçük veya en büyük sayı aranarak ortalama uzaklık olan a_k, O(n) süresinde hesaplanabilir. Aynı şekilde S_k altkümesinde de belirtilen özellik O(n) süresinde hesaplanabilir.

(c) S içindeki yakın sayı çiftlerini O(n)-sürede bulacak bir algoritma tanımlayın. Algoritmanızın neden doğru olduğunu ve koşma süresini kısaca açıklayın. (İpucu: Böl ve fethet'i kullanın.)

Çözüm: S'yi yakın bir çift bulana kadar yinelemeli olarak parçalarız.

1. S'nin, S_1 ve S_2'ye bölüntülemek için ortancasını buluruz.
2. Bölüm (b)'deki sonucu, S'nin bir yakın çiftini içeren S_k setini belirlemek için kullanırız.
3. S_k 'ya 2 eleman içerene kadar özyineleme uygularız.

Her bir özyineleme adımı setin eleman sayısını yarıya indireceğinden, özyinelemenin sonlanacağı kesindir. Her özyinelemeden sonra geriye kalan set, S'nin bir yakın sayı çiftini içerir.

Eğer belirleyici ortanca bulma algoritmasını kullanırsak, birinci adım, en kötü durumda, O(n) süresi alır. Bölüm (b)'de gösterdiğimiz gibi ikinci adım O(n) süre alır. Ayrıca ana teoreme gore,

$$T(n) = T(n/2) + O(n),$$

yineleme algoritmasının koşma süresi T (n) = O(n)'dir.

KARALAMA KAĞIDI – Lütfen, sınav sonunda kitapçıktan ayırın.

KARALAMA KAĞIDI – Lütfen, sınav sonunda kitapçıktan ayırın.