

Problem Seti 6 Çözümleri

Problem 6-1. Elektronik Billboard (İlan Tahtası)

E-Bill adlı yeni bir Elektronik İlan Tahtası firması kuruyorsunuz. Şimdilik bir ilan tahtanız var ve aynı anda tahtada sadece 1 reklam yayınlayabiliyorsunuz. Müşterilerinizle yaptığınız anlaşmaya göre, reklamlarını bir hafta boyunca yayınlarsanız size ödeme yapıyorlar, aksi halde yapmıyorlar. Müşteriler size reklamlarıyla rastgele zamanlarda geliyorlar ve yayın için bir bütçe öneriyorlar. Size geldikleri zaman reklamlarını hemen yayına başlayıp başlayamayacağınıza karar vermek zorundasınız. O sırada başka bir reklam yayınlıyorsanız, o yayının kesebilirsiniz ama kesilen yayından edeceğiniz kardan da vazgeçmiş olursunuz. Amaç karınızı en fazla arttıracak algoritmayı kuramaktır.

Gerçekte bir i reklamı a_i anında geliyor ve p_i karı oluyor. Bir reklam gelir gelmez algoritma onu yayınlayıp yayınlamayacağına anında karar vermek zorunda. Algoritma, a_i zamanında gelen i reklamını, a_i zamanından a_i+1 zamanına kadar yayınlarsa, p_i karını alıyor. Aynı anda sadece tek işin geldiğini varsayın. Ayrıca, i reklamı t zamanında bittiğinde billboard'da hemen başka bir reklamın başlatılabileceğini de varsayın.

Aşağıdaki AD-SCHEDULE algoritmasında $\alpha > 1$ 'in bir sabit olduğu durumu düşünün. Karı p_i olan bir i reklamı geldiğinde;

1. Eğer hiç reklam yayınlanmıyorsa, i 'yi yayınlamaya başla,
2. Eğer kârı p_k olan bir k reklamı yayınlanıyorsa, k 'yı sadece ve sadece $p_i > \alpha p_k$ olursa yayından çıkar, aksi halde i 'yi kabul etme..

Algoritmanın bir hafta boyunca yayınladığı reklamlar, *tamamlanmış reklamlar*, yayına başlayıp bir haftadan önce yayından kaldırdığı reklamlar da *atılan reklamlar* olarak anılırlar. Algoritmanın hiç kabul etmediği reklamlar da *reddedilen reklamlar* olarak anılırlar. Algoritma sadece tamamlanmış reklamlardan kar edebilir.

- (a) Şekil 1'deki geliş dizisini düşünün. AD-SCHEDULE (reklam-zamanlama çizelgesi) algoritmasının $\alpha = 1.5$ durumunda yürütüm iznini verin, yani her reklam gelişinde hangi eylemlerin olduğunu, hangilerinin tamamlandığını ve reddedildiğini açıklayın. AD-SCHEDULE tarafından kazanılan toplam karı hesaplayın.

Çözüm: 1 ve 3. Reklamlar atıldı. 2, 5 ve 6. Reklamlar reddedildi. 4, 7 ve 8. reklamlar tamamlandı ve toplam 13.7 kar edildi.

- (b) OPT (optimum) algoritmasının gelecek reklamlar dizisini önceden bildiğini ve reklam plasmanını karı en çok arttıracak şekilde yaptığını kabul edin. Şekil 1'deki reklamlardan hangileri OPT tarafından tamamlanır, reddedilir ve atılır? OPT'nin karı nedir?

Rek	Geliş zamanı	Kar
1	1.0	1.0
2	1.7	1.3
3	1.8	1.8
4	2.0	3.0
5	2.1	2.3
6	2.5	4.0
7	3.0	4.5
8	4.1	6.2

Şekil 1: AD-SCHEDULE için örnek bir girdi

Çözüm: Rek 1, 4, 7, ve 8 tamamlanır. Diğerleri reddedilir. OPT'un kârı 14.7 olur.

(c) Eğer $\alpha = 1$ olursa, AD-SCHEDULE'un OPT'ye oranla gelişigüzel kötü karlar edeceğini gösterin. (*İpucu:* OPT'un iyi, AD-SCHEDULE'un ise kötü sonuçlar vereceği bir reklamlar dizisi verin.)

Çözüm: $0 < \epsilon < 1/2$ olsun. $i \geq 0$ için i işinin geliş zamanı $a_i = i(1 - \epsilon)$ ve karı da $p_i = (\alpha + \epsilon)^i$ olsun. $a_i \leq a_{i+1} < a_i + 1$ ve $p_{i+1} = (\alpha + \epsilon) p_i > \alpha p_i$ olduğundan, AD-SCHEDULE i işini atar ve $i + 1$ işini başlatır. i üzerinde tümevarım kullanarak, eğer $2n$ sayıda iş varsa, o zaman AD-SCHEDULE sadece son işi tamamlayıp $p_{2n} = (\alpha + \epsilon)^{2n}$ kar elde eder.

$\epsilon < 1/2$ olduğundan, $[a_0, a_0 + 1)$, $[a_2, a_2 + 1)$, v.s. aralıkları ayrışiktir. Bu nedenle 0, 2, ... , $2n$ işlerini tamamlamak mümkündür. Bunun anlamı OPT'un karının en az aşağıdaki gibi olduğudur

$$\sum_{i=0}^n p_{2i} = \sum_{i=0}^n (\alpha + \epsilon)^{2i} = \frac{(\alpha + \epsilon)^{2(n+1)} - 1}{(\alpha + \epsilon)^2 - 1}.$$

Eğer $\alpha = 1$ ise, $(\alpha + \epsilon)^2 - 1 = \epsilon^2 + 2\epsilon$ çok küçük olabilir ve bu yüzden OPT, AD-SCHEDULE ile kıyaslandığında gelişigüzel yüksek kârlar sağlayabilir..

$A = \{1, 2, \dots, n\}$ reklam kümesini düşünün. Bir $S \subseteq A$ altkümesi, eğer ve sadece eğer, algoritma S altkümesindeki tüm reklamları tamamlayabiliyorsa billboard problemine bir çözüm getirir. Yani X çözümündeki hiçbir reklam çakışmaz. Bir S çözümünün P_S karı;

$$P_S = \sum_{i \in X} p_i \text{ olur..}$$

Bir reklamlar dizisi A için, AD-SCHEDULE'un $S \subseteq A$ çözümünü, OPT'un da $S^* \subseteq C$. çözümünü ürettiğini düşünün. Herhangi bir t anında $S_t \subseteq S$ AD-SCHEDULE'un tamamladığı reklamlar kümesi olsun(t anı dahil) ve $D_t \subseteq A - S$ de o ana kadar AD-SCHEDULE tarafından atılan reklamların kümesi olsun. Benzer şekilde $S_t^* \subseteq S^*$, OPT'un t anına kadar tamamladığı reklamların kümesi olsun..

(d) AD-SCHEDULE 'un t anında yayınladığı reklamın j olduğunu varsayın. Aşağıdaki ifadeyi tümevarım yöntemiyle kanıtlayın.

$$(\alpha - 1) \sum_{i \in D_t} p_i \leq p_j + \sum_{i \in S_t} p_i .$$

Çözüm: Reklamlar konusundaki kanıtlama tümevarımla yapılır. Birinci reklam geldikten sonra $j = 1$ olur. AD- SCHEDULE j 'yi yayınlamaya başlar ve hiç bir reklamı tamamlamamış yada atmamıştır. Bu nedenle $S_t = D_t = \emptyset$. Diyelim ki AD-SCHEDULE l reklamını yayınlarken, t anında k reklamı geliyor. (Eğer k geldiğinde, hiç bir reklam yayınlanmıyorsa, tümevarım adımının önemi kalmaz.) Tümevarım adımı için k gelmeden önce elimizde şu eşitlik vardır:

$$(\alpha - 1) \sum_{i \in D_t} p_i \leq p_l + \sum_{i \in S_t} p_i .$$

k reklamı t 'anında geldiğinde, eğer AD-SCHEDULE onu yayınlamama kararı verirse, hem D_t hem de S_t değişmez ve biz basit bir tümevarım kanıtlaması yaparız. Eğer AD-SCHEDULE l 'yi atar ve k 'yı yayınlamaya başlarsa, o zaman $p_k > \alpha p_l$ ve $D_t = D_t \cup \{l\}$ olur. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) \sum_{i \in D_{t'}} p_i &= (\alpha - 1) (\sum_{i \in D_t} p_i + p_l) = (\alpha - 1) (\sum_{i \in D_t} p_i) + \alpha p_l - p_l \leq \\ &(\alpha - 1) (\sum_{i \in D_t} p_i) + p_k - p_l = p_k + \sum_{i \in S_t} p_i . \end{aligned}$$

Bitti.

(e) OPT'nin bir kez başlattıktan sonra hiç bir reklamı çıkarmaya gerek duymayacağını kanıtlayın. Başka bir deyişle, eğer en uygun bir OPT algoritması bazen reklamları çıkaran bir S^* çözümü üretiyorsa, o zaman aynı çözümü üreten, ama hiç bir reklamı yayın dışı etmeyen bir başka OPT* algoritması vardır.

Çözüm: OPT* sadece, OPT'un başlatıp, yayını tamamladığı reklamları başlatır.

(f) Tüm $j \in S^*$ 'ler için, $\alpha p_{f(j)} \geq p_j$ ve $\alpha_j - 1 < \alpha_{f(j)} \leq \alpha_j$ durumlarını sağlayan "bire çok" (injective) bir eşleme, $f: S^* \rightarrow D_\infty \cup S$ olduğunu gösterin. (Eşlemlenin bire çok olduğunu göstermeyi unutmayın.)

Çözüm: $f(j)$ 'yi şöyle tanımlayın: $j \in S^*$ olan bir reklam için, $i = f(j) \in S \cup D_\infty$ seçin; $a_i \leq a_j$ olduğunda i en son iş olsun. (i 'nin j ile aynı olabileceğine dikkat edin.) $\alpha_j - 1 < \alpha_i$, olduğunu görmek kolaydır, aksi halde j geldiğinde i bitmiş olurdu ve AD-SCHEDULE j 'yi yapardı. Şimdi bu i için $\alpha p_i \geq p_j$, aksi halde AD-SCHEDULE i 'yi atar ve j 'ye başlar. j , S^* kümesinin içinde olduğundan, $[a_i - 1, a_j]$ aralıkları çakışmazlar. Bu nedenle fonksiyon "bire çok" tur.

(g) j^* ve j , OPT^* ve AD-SCHEDULE 'un t anında yayınladıkları reklamlar olsun. Tüm t değerleri için şunu kanıtlayın:

$$p_{j^*} + \sum_{i \in S_t^*} p_i \leq \alpha \left(p_j + \sum_{i \in D_t} p_i + \sum_{i \in S_t} p_i \right).$$

Çözüm: Karları sol tarafta sayılan tüm reklamlar S^* kümesinin içindedir. Bu nedenle;

$$p_{j^*} + \sum_{i \in S_t^*} p_i \leq \alpha \left(p_{f(j^*)} + \sum_{i \in S_t^*} p_{f(i)} \right)$$

Tüm $i \in S_t^*$, ve $\alpha_{f(j^*)} \leq \alpha_{j^*} \leq t$ değerleri için, f 'nin $D_\infty \cup S$ 'ya eşlemlendiğine aynı zamanda da $\alpha_{f(i)} \leq \alpha_i \leq t$ olduğuna dikkat edin. Bu nedenle, $f(j^*)$ ve her $f(i)$, $D_t \cup S_t \cup \{j\}$ kümesinin içindedir. Aynı zamanda f 'nin bire-çok olduğunu da fark edin. Böylece,

$$\alpha \left(p_{f(j^*)} + \sum_{i \in S_t^*} p_{f(i)} \right) \leq \alpha \left(p_j + \sum_{i \in D_t} p_i + \sum_{i \in S_t} p_i \right).$$

olur.

(h) Aşağıdaki potansiyel fonksiyonu düşünün;

$$\Phi(t) = \alpha^2 \left(\sum_{i \in S_t} p_i + p_j \right) - (\alpha - 1) \left(\sum_{i \in S_t^*} p_i + p_{j^*} \right),$$

Burada AD-SCHEDULE ve OPT^* , j and j^* reklamlarını t anında yayınlıyorlar. (d) ve (g) şıklarını kullanarak, bu potansiyel fonksiyonun daima artı değerli kaldığını kanıtlayın. Dilerseniz bunu doğrudan tümevarım kullanarak da kanıtlayabilirsiniz.

Çözüm: (g) şikkından şunu çıkarırız:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\geq \alpha^2 \left(\sum_{i \in S_t} p_i + p_j \right) - (\alpha - 1) \alpha \left(p_j + \sum_{i \in D_t} p_i + \sum_{i \in S_t} p_i \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{i \in S_t} p_i + p_j \right) - (\alpha - 1) \alpha \left(\sum_{i \in D_t} p_i \right),\end{aligned}$$

Bu (d)'ye göre şöyle olur.

$$\geq \alpha(\alpha - 1) \left(\sum_{i \in D_t} p_i \right) - (\alpha - 1) \alpha \left(\sum_{i \in D_t} p_i \right) = 0.$$

(i) AD-SCHEDULE 'un $\alpha^2 / (\alpha - 1)$ -rekabetçi (competitive) olduğu sonucunu çıkarın.

Çözüm: Φ artı değerli olduğundan, α^2 kere AD-SCHEDULE'un karı en az $\{\alpha - 1\}$ carı OPT^* 'un karı olur ve buradan AD-SCHEDULE'un $\alpha^2 / (\alpha - 1)$ -rekabetçi olduğunu çıkarırız

(j) Rekabetçilik oranını “en aza” indiren en uygun α değeri nedir?

Çözüm: $\alpha = 2$

(k) İsteğe bağlı:

AD-SCHEDULE'un karı P olduğunda, OPT 'un karının en az $((\alpha^2 / (\alpha - 1)) - 1)P$ olacağı bir reklamlar dizisi örneği verin

Çözüm: $0 < \epsilon < 1/n$ olsun. $0 \leq i \leq n$ için, 2^i işinde, $\alpha_{2^i} = i(1 - \epsilon)$ geliş zamanı ve $p_{2^i} = (\alpha + \epsilon)^i$ de kar olsun. $0 \leq i \leq n$ için, $2^i + 1$ işinde, $\alpha_{2^i+1} = i$ geliş zamanı ve $p_{2^i+1} = \alpha (\alpha + \epsilon)^i$ de kar olsun.

$0 \leq \epsilon < 1/n$ olduğundan, $\alpha_{2^i} \leq \alpha_{2^i+1} < \alpha_{(2^i+1)} < \alpha_{2^i} + 1$ olur. Eğer AD-SCHEDULE 2^i işini yürütüyorsa,

- $2^i + 1$ işini atar, çünkü $p_{2^i+1} = \alpha p_{2^i}$ 'dir ; sonra da
 - 2^i işini atıp $2(i + 1)$ işine başlar, çünkü $p_{2(i+1)} = (\alpha + \epsilon) p_{2^i} > \alpha p_{2^i}$ 'dir
- i bağlamında tümevarım kullanarak, AD-SCHEDULE only sadece $2n$ işini tamamlar ve $p_{2n} = (\alpha + \epsilon)^n$ karını verir.

$[\alpha_1, \alpha_1+1)$, $[\alpha_3, \alpha_3+1]$ gibi aralıkların ayrışık olduğuna dikkat edin. Böylece $1, 3, \dots, 2n+1$ işlerini tamamlamak mümkündür Bunun anlamı, OPT 'un karının en az;

$$\sum_{i=0}^n p_{2i+1} = \sum_{i=0}^n \alpha(\alpha + \epsilon)^i = \frac{\alpha(\alpha + \epsilon)^{n+1} - 1}{\alpha + \epsilon - 1}.$$

olduğudur. ϵ 'u çok küçük seçersek, yeterince büyük n değerleri için OPT 'un karı $(\alpha^2 p_{2n} - 1) / (\alpha - 1) \geq ((\alpha^2 / (\alpha - 1)) - 1)p_{2n}$ olur..

(i) *İsteğe bağlı:* Billboard-çizelgeleme probleminin, reklam uzunluklarının değiştiği ve karın da reklam uzunluğuna orantılı olduğu bir biçimini düşünün. Yani her i reklamının p_i karı ve yayın süresi var. AD-SCHEDULE'un problemin bu şekli için tam bir çözümlemesini yapın.

Çözüm: Şunu şık (d)'dekine benzer biçimde kanıtlayabiliriz:

$$(\alpha - 1) \sum_{i \in D_t} p_i \leq p_j + \sum_{i \in S_t} p_i$$

Ayrıca OPT* 'un çalıştığı her anda, AD-SCHEDULE'un da çalıştığını gözlemleyin. Kar işin uzunluğuyla aynı olduğundan, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$p_{j^*} + \sum_{i \in S_t^*} p_i \leq \alpha \left(p_j + \sum_{i \in D_t} p_i + \sum_{i \in S_t} p_i \right).$$

Böylece, potansiyel fonksiyonun artı değerinde kaldığına ilişkin kanıtlamamız istenen her iki eşitsizlik de doğrudur ve aynı potansiyel fonksiyonu, aynı rekabetçilik oranını kanıtlamada kullanabiliriz.

Problem 6-2. Kırmızı-siyah ağaçları yeniden yapılandırmanın maliyeti.

Kırmızı-siyah ağaçların yapısını değiştiren 4 temel işlem vardır : düğüm araya yerleştirmeleri, düğüm silmeleri, döndürmeler ve renk değiştirmeler. RB-INSERT (KS-ARAYA YERLEŞTİRME) ve RB-DELETE (KS-SİLME)'nin kırmızı-siyah özelliklerin korunması için, sadece $O(1)$ düzeyinde döndürme, düğüm araya yerleştirme ve düğüm silme kullandığını görmüştük, ama bunlar çok daha fazla renk değiştirmesi yapabilir.

(a) n sayıda düğümü olan bir kırmızı-siyah ağacı, RB-INSERT işleminin $\Omega(\lg n)$ düzeyinde renk değiştirmesine neden olduğunu öngörerek nasıl yapılandıracağınızı açıklayın. Aynı şeyi RB-DELETE için yapın.

Çözüm: RB-INSERT için, çift sayılı düzeyi olan tam bir kırmızı-siyah ağaç düşünün; tek sayılı düzeylerde siyah, çift sayılı düzeylerde de kırmızı düğümler olsun. Bir düğüm, yapraklardan birinin ardılı olarak araya yerleştirildiğinde, eklenen düğümden köke kadar olan yol üzerindeki düğümlerin renklerini düzeltmek için $\Omega(\lg n)$ sayıda renk değiştirme gerekecektir. RB-DELETE, için tüm düğümleri siyah

olan bir kırmızı-siyah ağaç düşünün. Bir yaprak silinirse, “çift siyah olgusu” nedeniyle, yukarıda köke kadar tüm yoldaki her düzeyde $\Omega(\lg n)$ kez renk değişimi gerekecektir (RB-DELETE-FIXUP / KS-SİLME-DÜZELTMESİ durum 2).

İşlem başına renk renk değişimlerinin sayısının en kötü durumu logartmik olabilir ama, biz aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız..

Teorem 1 *Başlangıçta boş bir kırmızı-siyah ağaçta, RB-INSERT ve RB-DELETE işlemleri, en kötü durumda $O(m)$ yapısal değişikliğe neden olur . (FIXUP: ONARIM)*

- (b) Kitaptaki Şekil 13.4, 13.5, ve 13.6’yı dikkatlice inceleyin. Hem RB-INSERT-FIXUP hem de RB-DELETE-FIXUP ’in kodlarının ana döngülerince yürütülen işlemlerden bazıları *sonlanıyor*: bir kez karşılaşıldığında, sabit sayıda işlem sonrası döngünün sona ermesine neden oluyorlar. RB-INSERT-FIXUP ve RB-DELETE-FIXUP’in her durumu için, hangilerinin sonlandığını, hangilerinin sonlanmadığını belirtin.

Çözüm: RB-INSERT-FIXUP’in 1. Durumu ve RB-DELETE-FIXUP’in 2. Durumu dışındaki tüm durumlarda sonlanıyor.

Önce sadece araya yerleştirme uygulamasındaki yapısal değişiklikleri çözümleyeceğiz. T bir kırmızı-siyah ağaç olsun ve $\Phi(T)$ de T deki kırmızı düğümlerin sayısı olsun. RB-INSERT-FIXUP’in her üç durumunda uygulanan yapısal değişimlerin 1 potansiyel birimle ödendiğini varsayın.

- (c) T' RB-INSERT-FIXUP ’in 1. durumu T ’ye uygulandığında çıkan sonuç olsun. Şöyle olduğunu savunun:

$$\Phi(T') = \Phi(T) - 1$$

Çözüm: RB-INSERT-FIXUP r’in 1. durumunda, kitaptaki Şekil 13.4’te görülebileceği gibi, kırmızı düğümlerin sayısı “bir” azalır. Böylece $\Phi(T') = \Phi(T) - 1$ olur.

- (d) Kırmızı-siyah bir ağaca RB-INSERT kullanarak araya yerleştirme yapmak üç parçaya bölünebilir. TREE-INSERT, kullanıldığında RB-INSERT-FIXUP’in sonlanmayan durumları ve sonlanan durumlarından kaynaklanan yapısal değişimleri ve potansiyel değişiklikleri listeleyin.

Çözüm: TREE-INSERT bir düğüm araya yerleştirmesine ve potansiyelde bir birim artışa neden olur. RB-INSERT-FIXUP’in sonlanmayan durumu (Durum 1), 3 renk değişikliği ve potansiyelde bir birimlik azalma yapar. RB-INSERT-FIXUP’in sonlanan durumlarının (Durum 2 ve 3) her biri bir döndürmeye neden olur ve potansiyeli etkilemez.

- (e) Şık (d)’yi kullanarak, (Φ ’ya göre) RB-INSERT ’in yapısal değişimlerinin amortize edilmiş sayısının $O(1)$ olduğunu savunun.

Çözüm: TREE-INSERT ile RB-INSERT-FIXUP ’in sonlanan durumlarından kaynaklanan

yapısal değişimlerin sayısı ve potansiyel değişiklik miktarı sabittir; bu nedenle bu üç parçanın amortize maliyeti de sabittir. RB-INSERT-FIXUP 'ın sonlanmayan durumu $O(\lg n)$ kez tekrar edebilir ama, amortize maliyeti sıfırdır, çünkü varsayımımız gereği potansiyeldeki birim düşüş, gereken yapısal değişimleri karşılar. Böylece RB-INSERT 'in en kötü durumda amortize maliyeti sabittir.

Şimdi teoremi hem araya yerleştirmeler, hem de silmeler için kanıtlamak istiyoruz. $w(v)$ 'yi şöyle tanımlayalım:

$$w(v) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } v \text{ kırmızı ise,} \\ 1 & \text{eğer } v \text{ siyah ise ve kırmızı ardılı yoksa,} \\ 0 & \text{eğer } v \text{ siyah ise ve bir kırmızı ardılı varsa,} \\ 2 & \text{eğer } v \text{ siyah ise ve iki kırmızı ardılı varsa.} \end{cases}$$

Bir T kırmızı-siyah ağacının potansiyelini şöyle tanımlayalım:

$$\Phi(T) = \sum_{v \in T} w(v),$$

ve T' , RB-INSERT-FIXUP veya RB-DELETE-FIXUP 'ın herhangi bir sonlanmayan durumunun T 'ye uygulanmasıyla oluşan ağaç olsun.

- (f) RB-INSERT-FIXUP'ın tüm sonlanmayan durumlarında $\Phi(T') \leq \Phi(T) - 1$ olduğunu gösterin. RB-INSERT-FIXUP tarafından uygulanan yapısal değişimlerin amortize edilmiş sayısının (Φ 'ya göre) $O(1)$ olduğunu tartışın.

Çözüm: Kitaptaki Şekil 13.5'ten, RB-INSERT-FIXUP'ın 1. durumda ağaçta aşağıdaki değişiklikleri yaptığını görürüz:

- İki kırmızı ardılı olan bir siyah düğümü kırmızı bir düğüme çevirir (C düğümü) ve potansiyelde -2'lik bir değişiklik yapar.
- Kırmızı bir düğümü, bir kırmızı ardılı olan siyah bir düğüme çevirir (üst şekildeli A düğümü ; alt şekildeki B düğümü), ve potansiyelde değişikliğe yol açmaz.
- Kırmızı bir düğümü, bir kırmızı ardılı olmayan siyah bir düğüme çevirir (D düğümü), ve potansiyeli 1 değiştirir.

Potansiyeldeki toplam değişim -1'dir; bu yapılan yapısal değişimleri karşıladığından, Durum 1'in (sonlanmayan durum) amortize maliyeti 0' olur. RB-INSERT-FIXUP'ın sonlanan durumları sabit yapısal değişikliklere ve potansiyelde sabit değişikliğe neden olduğundan, ve $w(v)$ 'nin sonlanan durumları sadece düğüm rengine bağımlı olduğundan ve renk değişikliği sayısı sabit olduğundan, sonlanan durumların amortize maliyeti en çok sabit olabilir. Bu nedenle, RB-INSERT-FIXUP'ın toplam amortize maliyeti sabittir..

(g) RB-DELETE-FIXUP'ın tüm sonlanmayan durumlarında $\Phi(T') \leq \Phi(T) - 1$ olduğunu gösterin. RB-DELETE-FIXUP tarafından uygulanan yapısal değişimlerin amortize edilmiş sayısının (Φ 'ya göre) $O(1)$ olduğunu tartışın.

Çözüm: Kitaptaki Şekil 13.6 RB-DELETE-FIXUP m'in 2. durumda ağaçta aşağıdaki değişiklikleri yaptığını gösteriyor:

- Kırmızı ardılı olmayan bir siyah düğümü kırmızı bir düğüme (düğüm D) çevirir ve potansiyelde **-1**'lik değişime neden olur.
- Eğer B kırmızı ise, o zaman bir siyah ardıl yitirir, potansiyelde değişim olmaz.
- Eğer B siyah ise, o zaman hiç kırmızı ardılı olmama durumundan, bir kırmızı ardılı olma durumuna geçer ve potansiyel **-1** değişir.

Potansiyeldeki toplam değişim, B'nin rengine bağlı olarak ya -1, ya da -2 'dir. Her iki durumda da, potansiyelin bir birimiyle yapısal değişimler karşılanır ve böylece Durum 2'nin (sonlanmayan durum) amortize maliyeti en çok 0 olur. RB-DELETE-FIXUP'ın sonlanan durumları sabit yapısal değişikliklere ve potansiyelde sabit değişikliğe neden olduğundan, ve $\omega(v)$ 'nin sonlanan durumları sadece düğüm rengine bağımlı olduğundan ve renk değişikliği sayısı sabit olduğundan, sonlanan durumların amortize maliyeti en çok sabit olabilir. Bu nedenle, RB-DELETE-FIXUP'ın toplam amortize maliyeti sabittir..

(h) Teorem 1'in kanıtlamasını tamamlayın..

Çözüm: Her işlemin amortize maliyeti üst sınırdaki bir sabitle sınırlandırıldığından, başlangıçta boş olan bir kırmızı-siyah ağaçta, m boyutlu RB-INSERT ve RB-DELETE işlemlerinin herhangi bir dizisindeki yapısal değişimlerin gerçek sayısı, en kötü durumda $O(m)$ yapısal değişikliğe neden olur.