

## Problem Seti 6

*Okumalar: Bölüm 17 ve karşılaştırmalı çözümleme konusunda dağıtılan not.*

Hem egzersizler hem de problemler çözülecek, ama sadece problemler teslim edilecektir. Egzersizler ders materyalini hazmettirmek amacıyla hazırlanmıştır. Her ne kadar egzersiz çözümlerini teslim etmeyeceksiniz de egzersizdeki konulardan sorumlu olacaksınız.

Her sayfanın üstüne adınızı, dersin kod numarasını, problemin numarasını, etüt bölümünüzü ve ortak çalışma yaptığınız arkadaşlarınızın isimleriyle tarihleri yazın. Lütfen çözümlerinizi zımbalayın ve üç delikli kağıtta teslim edin.

Sık sık bir problem için "bir algoritma bulun" isteğiyle karşılaşacaksınız. Bu konudaki yanıtınız kısa bir makale şeklinde olmalıdır. Makalenin konu paragrafı, çözdüğünüz problem ve sonuçlarınızı özetleyecek şekilde düzenlenmelidir. Makalenizin ana yapısında aşağıdaki bilgiler verilmelidir:

1. Algoritmanın İngilizce açıklaması ve eğer faydalı olacaksa sözde kodu..
2. Algoritmanızın nasıl çalıştığını gösteren en az bir işlenmiş örnek veya şekil.
3. Algoritmanın doğruluğunun kanıtı (veya göstergesi).
4. Algoritmanın koşma zamanının çözümlemesi.

Amacınız iletişim kurmaktır. Tam not sadece iyi açıklanan doğru yanıtlara verilecektir. Ya da net olmayan açıklamalar daha düşük notlandırılacaktır.

|                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| <b>Egzersiz 6-1.</b> Kitaptaki | 17.1-1 nolu egzersiz (410. Sayfa) |
| <b>Egzersiz 6-2.</b> Kitaptaki | 17.3-3 nolu egzersiz (416. Sayfa) |
| <b>Egzersiz 6-3.</b> Kitaptaki | 17.3-6 nolu egzersiz (416. Sayfa) |
| <b>Egzersiz 6-4.</b> Kitaptaki | 17.3-7 nolu egzersiz (416. Sayfa) |
| <b>Egzersiz 6-5.</b> Kitaptaki | 17.4-2 nolu egzersiz (425. Sayfa) |

### Problem 6-1. Elektronik Billboard (İlan Tahtası)

E-Bill adlı yeni bir Elektronik İlan Tahtası firması kuruyorsunuz. Şimdilik bir ilan tahtanız var ve aynı anda tahtada sadece 1 reklam yayınlayabiliyorsunuz. Müşterilerinizle yaptığınız anlaşmaya göre, reklamlarını bir hafta boyunca yayınlarsanız size ödeme yapıyorlar, aksi halde yapmıyorlar. Müşteriler size reklamlarıyla rastgele zamanlarda geliyorlar ve yayın için bir bütçe öneriyorlar. Size geldikleri zaman reklamlarını hemen yayına başlayıp başlayamayacağınıza karar vermek zorundasınız. O sırada başka bir reklam yayınlıyorsanız, o yayınının kesebilirsiniz ama kesilen yayından edeceğiniz kardan da vazgeçmiş olursunuz. Amaç karınızı en fazla arttıracak algoritmayı kuramaktır.

Gerçekte bir  $i$  reklamı  $a_i$  anında geliyor ve  $p_i$  karı oluyor. Bir reklam gelir gelmez algoritma onu yayınlayıp yayınlamayacağına anında karar vermek zorunda. Algoritma,  $a_i$  zamanında gelen  $i$  reklamını,  $a_i$  zamanından  $a_i+1$  zamanına kadar yayınlarsa,  $p_i$  karını alıyor. Aynı anda sadece tek işin geldiğini varsayın. Ayrıca,  $i$  reklamı  $t$  zamanında bittiğinde billboard'da hemen başka bir reklamın başlatılabileceğini de varsayın.

Aşağıdaki AD-SCHEDULE algoritmasında  $\alpha > 1$ 'in bir sabit olduğu durumu düşünün. Karı  $p_i$  olan bir  $i$  reklamı geldiğinde;

1. Eğer hiç reklam yayınlanmıyorsa,  $i$  'yi yayınlamaya başla,
2. Eğer kârı  $p_k$  olan bir  $k$  reklamı yayınlanıyorsa,  $k$ 'yı sadece ve sadece  $p_i > \alpha p_k$  olursa yayından çıkar, aksi halde  $i$  'yi kabul etme..

Algoritmanın bir hafta boyunca yayınladığı reklamlar, *tamamlanmış reklamlar*, yayına başlayıp bir haftadan önce yayından kaldırdığı reklamlar da *atılan reklamlar* olarak anılırlar. Algoritmanın hiç kabul etmediği reklamlar da *reddedilen reklamlar* olarak anılırlar. Algoritma sadece tamamlanmış reklamlardan kar edebilir.

- (a) Şekil 1'deki geliş dizisini düşünün. AD-SCHEDULE (reklam-zamanlama çizelgesi) algoritmasının  $\alpha = 1.5$  durumunda yürütüm iznini verin, yani her reklam gelişinde hangi eylemlerin olduğunu, hangilerinin tamamlandığını ve reddedildiğini açıklayın. AD-SCHEDULE tarafından kazanılan toplam karı hesaplayın.

- (b) OPT (optimum) algoritmasının gelecek reklamlar dizisini önceden bildiğini ve reklam plasmanını karı en çok arttıracak şekilde yaptığını kabul edin. Şekil 1'deki reklamlardan hangileri OPT tarafından tamamlanır, reddedilir ve atılır? OPT'nin karı nedir?

| Rek | Geliş zamanı | Kar |
|-----|--------------|-----|
| 1   | 1.0          | 1.0 |
| 2   | 1.7          | 1.3 |
| 3   | 1.8          | 1.8 |
| 4   | 2.0          | 3.0 |
| 5   | 2.1          | 2.3 |
| 6   | 2.5          | 4.0 |
| 7   | 3.0          | 4.5 |
| 8   | 4.1          | 6.2 |

**Şekil 1:** AD-SCHEDULE için örnek bir girdi

(c) Eğer  $\alpha = 1$  olursa, AD-SCHEDULE'un OPT'ye oranla gelişigüzel kötü karlar edeceğini gösterin. (İpucu: OPT'un iyi, AD-SCHEDULE'un ise kötü sonuçlar vereceği bir reklamlar dizisi verin.)

$A = \{1, 2, \dots, n\}$  reklam kümesini düşünün. Bir  $S \subseteq A$  altkümesi, eğer ve sadece eğer, algoritma  $S$  altkümesindeki tüm reklamları tamamlayabiliyorsa billboard problemine bir çözüm getirir. Yani  $X$  çözümündeki hiçbir reklam çakışmaz. Bir  $S$  çözümünün  $P_S$  karı;

$$P_S = \sum_{i \in X} p_i \quad \text{olur..}$$

Bir reklamlar dizisi  $A$  için, AD-SCHEDULE'un  $S \subseteq A$  çözümünü, OPT'un da  $S^* \subseteq C$  çözümünü ürettiğini düşünün. Herhangi bir  $t$  anında  $S_t \subseteq S$  AD-SCHEDULE'un tamamladığı reklamlar kümesi olsun(  $t$  anı dahil) ve  $D_t \subseteq A - S$  de o ana kadar AD-SCHEDULE tarafından atılan reklamların kümesi olsun. Benzer şekilde  $S_t^* \subseteq S^*$ , OPT'un  $t$  anına kadar tamamladığı reklamların kümesi olsun..

(d) AD-SCHEDULE'un  $t$  anında yayınladığı reklamın  $j$  olduğunu varsayın. Aşağıdaki ifadeyi tümevarım yöntemiyle kanıtlayın.

$$(\alpha - 1) \sum_{i \in D_t} p_i \leq p_j + \sum_{i \in S_t} p_i .$$

(e) OPT'nin bir kez başlattıktan sonra hiç bir reklamı çıkarmaya gerek duymayacağını kanıtlayın. Başka bir deyişle, eğer en uygun bir OPT algoritması bazen reklamları çıkaran bir  $S^*$  çözümü ürettiyorsa, o zaman aynı çözümü üreten, ama hiç bir reklamı yayın dışı etmeyen bir başka OPT\* algoritması vardır.

(f) Tüm  $j \in S^*$  ler için,  $\alpha p_{f(j)} \geq p_j$  ve  $\alpha_j - 1 < \alpha_{f(j)} \leq \alpha_j$  durumlarını sağlayan “bire çok” (injective) bir eşleme,  $f: S^* \rightarrow D_\infty \cup S$  olduğunu gösterin. (Eşlemlenin bire çok olduğunu göstermeyi unutmayın.)

**(g)**  $j^*$  ve  $j$ ,  $\text{OPT}^*$  ve  $\text{AD-SCHEDULE}$  'un  $t$  anında yayınladıkları reklamlar olsun. Tüm  $t$  değerleri için şunu kanıtlayın:

$$p_{j^*} + \sum_{i \in S_t^*} p_i \leq \alpha \left( p_j + \sum_{i \in D_t} p_i + \sum_{i \in S_t} p_i \right).$$

**(h)** Aşağıdaki potansiyel fonksiyonu düşünün;

$$\Phi(t) = \alpha^2 \left( \sum_{i \in S_t} p_i + p_j \right) - (\alpha - 1) \left( \sum_{i \in S_t^*} p_i + p_{j^*} \right),$$

Burada  $\text{AD-SCHEDULE}$  ve  $\text{OPT}^*$ ,  $j$  and  $j^*$  reklamlarını  $t$  anında yayınlıyorlar. (d) ve (g) şıklarını kullanarak, bu potansiyel fonksiyonun daima artı değerli kaldığını kanıtlayın. Dilerseniz bunu doğrudan tümevarım kullanarak da kanıtlayabilirsiniz.

**(i)**  $\text{AD-SCHEDULE}$  'un  $\alpha^2 / (\alpha - 1)$ -rekabetçi (competitive) olduğu sonucunu çıkarın.

**(j)** Rekabetçilik oranını “en aza” indiren en uygun  $\alpha$  değeri nedir?

**(k)** *İsteğe bağlı:*

$\text{AD-SCHEDULE}$  'un karı  $P$  olduğunda,  $\text{OPT}$  'un karının en az  $((\alpha^2 / (\alpha - 1)) - 1)P$  olacağı bir reklamlar dizisi örneği verin

**(l)** *İsteğe bağlı:* Billboard-çizelgeleme probleminin, reklam uzunluklarının değiştiği ve karın da reklam uzunluğuna orantılı olduğu bir biçimini düşünün. Yani her  $i$  reklamının  $p_i$  karı ve yayın süresi var.  $\text{AD-SCHEDULE}$  'un problemin bu şekli için tam bir çözümlemesini yapın.

### Problem 6-2. Kırmızı-siyah ağaçları yeniden yapılandırmanın maliyeti.

Kırmızı-siyah ağaçların yapısını değiştiren 4 temel işlem vardır : düğüm araya yerleştirmeleri, düğüm silmeleri, döndürmeler ve renk değiştirmeler. RB-INSERT (KS-ARAYA YERLEŞTİRME) ve RB-DELETE (KS-SİLME)'nin kırmızı-siyah özelliklerin korunması için, sadece  $O(1)$  düzeyinde döndürme, düğüm araya yerleştirme ve düğüm silme kullandığını görmüştük, ama bunlar çok daha fazla renk değiştirmesi yapabilir.

- (a)  $n$  sayıda düğümü olan bir kırmızı-siyah ağacı, RB-INSERT işleminin  $\Omega(\lg n)$  düzeyinde renk değiştirmesine neden olduğunu öngörerek nasıl yapılandıracağınızı açıklayın. Aynı şeyi RB-DELETE için yapın.

İşlem başına renk renk değişimlerinin sayısının en kötü durumu logartmik olabilir ama, biz aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız..

**Teorem 1** *Başlangıçta boş bir kırmızı-siyah ağaçta, RB-INSERT ve RB-DELETE işlemleri, en kötü durumda  $O(m)$  yapısal değişikliğe neden olur . (FIXUP: ONARIM)*

- (b) Kitaptaki Şekil 13.4, 13.5, ve 13.6'yı dikkatlice inceleyin. Hem RB-INSERT-FIXUP hem de RB-DELETE-FIXUP 'ın kodlarının ana döngülerince yürütülen işlemlerden bazıları *sonlanıyor*: bir kez karşılaşıldığında, sabit sayıda işlem sonrası döngünün sona ermesine neden oluyorlar. RB-INSERT-FIXUP ve RB-DELETE-FIXUP'ın her durumu için, hangilerinin sonlandığını, hangilerinin sonlanmadığını belirtin.

Önce sadece araya yerleştirme uygulamasındaki yapısal değişiklikleri çözümleyeceğiz.  $T$  bir kırmızı-siyah ağaç olsun ve  $\Phi(T)$  de  $T$ 'deki kırmızı düğümlerin sayısı olsun. RB-INSERT-FIXUP'ın her üç durumunda uygulanan yapısal değişimlerin 1 potansiyel birimle ödendiğini varsayın.

- (c)  $T'$  RB-INSERT-FIXUP 'ın 1. durumu  $T$ 'ye uygulandığında çıkan sonuç olsun. Şöyle olduğunu savunun:

$$\Phi(T') = \Phi(T) - 1$$

- (d) Kırmızı-siyah bir ağaca RB-INSERT kullanarak araya yerleştirme yapmak üç parçaya bölünebilir. TREE-INSERT, kullanıldığında RB-INSERT-FIXUP'ın sonlanmayan durumları ve sonlanan durumlarından kaynaklanan yapısal değişimleri ve potansiyel değişiklikleri listeleyin.

(e) Şık (d)'yi kullanarak, ( $\Phi$  'ya göre) RB-INSERT 'in yapısal değişimlerinin amortize edilmiş sayısının  $O(1)$  olduğunu savunun.

Şimdi teoremi hem araya yerleştirmeler, hem de silmeler için kanıtlamak istiyoruz.  $w(v)$ 'yi şöyle tanımlayalım:

$$w(v) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } v \text{ kırmızı ise,} \\ 1 & \text{eğer } v \text{ siyah ise ve kırmızı ardılı yoksa,} \\ 0 & \text{eğer } v \text{ siyah is eve bir kırmızı ardılı varsa,} \\ 2 & \text{eğer } v \text{ siyah is eve iki kırmızı ardılı varsa.} \end{cases}$$

Bir  $T$  kırmızı-siyah ağacının potansiyelini şöyle tanımlayalım:

$$\Phi(T) = \sum_{v \in T} w(v) ,$$

ve  $T'$ , RB-INSERT-FIXUP veya RB-DELETE-FIXUP 'in herhangi bir sonlanmayan durumunun  $T$ 'ye uygulanmasıyla oluşan ağaç olsun.

(f) RB-INSERT-FIXUP'in tüm sonlanmayan durumlarında  $\Phi(T') \leq \Phi(T)-1$  olduğunu gösterin. RB-INSERT-FIXUP tarafından uygulanan yapısal değişimlerin amortize edilmiş sayısının ( $\Phi$ 'ya göre)  $O(1)$  olduğunu tartışın.

(g) RB-DELETE-FIXUP'in tüm sonlanmayan durumlarında  $\Phi(T') \leq \Phi(T)-1$  olduğunu gösterin. RB-DELETE-FIXUP tarafından uygulanan yapısal değişimlerin amortize edilmiş sayısının ( $\Phi$ 'ya göre)  $O(1)$  olduğunu tartışın.

(h) Teorem 1'in kanıtlamasını tamamlayın..