

Problem Set 1 Çözümler

Problem 1-1. Asimptotik Simgelem

Aşağıdaki her şık için asimptotik olarak negatif olmayan fonksiyonlar durumunda; çözümün her zaman doğru (always true), hiçbir zaman doğru değil (never true) veya bazen doğru (some times true) olduğuna karar verin ve her zaman doğru ya da hiçbir zaman doğru değil durumlarında neden böyle olduğunu açıklayın. Bazen doğru durumunda, doğru olduğu durum için ve yanlış olduğu durum için birer örnek verin.

(a) $f(n) = O(f(n)^2)$

Çözüm: Bazen doğru: $f(n) = n$ için doğru ama $f(n) = 1/n$ için doğru değil. (Bu beyan $f(n) = \Omega(1)$ için her zaman doğrudur ve bu nedenle bu derste çalışacağımız çoğu fonksiyon ve özellikle tüm zaman ve mekan karmaşıklık fonksiyonları için geçerlidir.)

(b) $f(n)+g(n) = \Theta(\max(f(n),g(n)))$

Çözüm: Her zaman doğru: $\max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq 2 \max(f(n), g(n))$.

(c) $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$

Çözüm: Her zaman doğru: $f(n) + g(n)$ yi düşünün ve burada $g(n) = O(f(n))$ ve c öyle bir sabit olsun ki yeterince büyük n değerleri için $0 \leq g(n) < cf(n)$. Bu durumda yeterince büyük n için, $f(n) \leq f(n) + g(n) \leq (1 + c)f(n)$.

(d) $f(n) = \Omega(g(n))$ ve $f(n) = o(g(n))$ (küçük-o' ya dikkat edin)

Çözüm: Hiçbir zaman doğru değil: Eğer $f(n) = \Omega(g(n))$ ise, tüm $n > n_\Omega$ değerleri için bir pozitif sabit c_Ω ve n_Ω vardır ve bu durumda $cg(n) \leq f(n)$ olur. Ama eğer $f(n) = o(g(n))$ ise tüm $n > n_o(c)$, $f(n) < cg(n)$ durumlarında, her pozitif sabit c için bir $n_o(c)$ vardır. Eğer $f(n) = \Omega(g(n))$ ve $f(n) = o(g(n))$ ise o zaman bunu $n > \max(n_\Omega, n_o(c_\Omega))$ olur; oysaki olması gereken $f(n) < c_\Omega g(n) \leq f(n)$ ' dir ve bu bir çelişkidir.

(e) $f(n) \neq O(g(n))$ ve $g(n) \neq O(f(n))$

Çözüm: Bazen doğru: $f(n) = 1$ ve $g(n) = \|n * \sin(n)\|$ için bu doğrudur ancak her $f(n) = O(g(n))$, örneğin $f(n) = g(n) = 1$ için doğru değildir.

Problem 1-2. Yinelemeler

Aşağıdaki yinelemelerde $T(n)$ 'nin asimptotik üst ve alt sınırlarını verin. $T(n)$ 'nin $n \leq 3$ için sabit olduğunu varsayın. Sınırlarınızı mümkün olduğunca sıkı tutun ve yanıtlarınızın gerekçesini verin.

(a) $T(n) = 2T(n/3) + n \lg n$

Çözüm: Ana Metodun 3. durumuna göre, $T(n) = \Theta(n \lg n)$

(b) $T(n) = 3T(n/5) + \lg^2 n$

Çözüm: Ana Metodun 1. durumuna göre, $T(n) = \Theta(n^{\log_5(3)})$

(c) $T(n) = T(n/2) + 2^n$

Çözüm: Ana teoremin 3. durumu, (Düzenlilik koşulunu kontrol edin), $\Theta(2^n)$

(d) $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\lg \lg n)$

Çözüm: Değişkenleri değiştir: $m = \lg n$ olsun. Yineleme $S(m) = S(m/2) + \Theta(\lg m)$ olur. Ana teoremin 2. Durumu geçerlidir, yani $T(n) = \Theta((\lg \lg n)^2)$.

(e) $T(n) = 10T(n/3) + 17n^{1.2}$

Çözüm: $\log_3 9 = 2$ olduğundan $\log_3 10 > 2 > 1.2$ olur. Ana teoremin 1. durumu geçerlidir. $\Theta(n^{\log_3 10})$

(f) $T(n) = 7T(n/2) + n^3$

Çözüm: Ana Metodun 3. Durumu gereği $T(n) = \Theta(n^3)$

$$(g) T(n) = T(n/2 + \sqrt{n}) + \sqrt{6046}$$

Çözüm: $T(n)$, tümevarım gereği tekdüze artan bir fonksiyondur. Yani yeterince büyük n değerleri için $T(n/2) \leq T(n/2 + \sqrt{n}) \leq T(3n/4)$. Her evrede $\sqrt{6046}$ tutarında bir sabit gider olur ama problemin boyutu da en az $1/2$, en çok $3/4$ oranında küçülür. Böylece $T(n) = \Theta(\lg n)$ ' dir.

$$(h) T(n) = T(n-2) + \lg n$$

Çözüm: $T(n) = \Theta(n \lg n)$. $T(n) = \sum_{i=1}^{n/2} \lg 2i \geq \sum_{i=1}^{n/2} \lg i \geq (n/4)(\lg n/4) = \Omega(n \lg n)$. Üst sınırdaki $S(n) = S(n-1) + \lg n$ iken $T(n) \leq S(n)$, olur ve bu da açıkça $O(n \lg n)$ ' dir.

$$(i) T(n) = T(n/5) + T(4n/5) + \Theta(n)$$

Çözüm: Ana teorem burada geçerli değildir. Öz yineleme ağacını çizin. Her düzeyde $\Theta(n)$ iş yapın. Düzeylerin sayısı $\log_{5/4} n = \Theta(\lg n)$ olduğundan, $T(n) = \Theta(n \lg n)$ ' yi tahmin edin ve tahmininizi kanıtlamak için yerine koyma metodunu kullanın.

$f(n) = \Theta(n)$ teriminde, $\Omega(n)$ ve $O(n)$ için sabitlerin sırasıyla n_0 , c_0 ve c_1 olduğunu varsayın.

Diğer bir deyişle tüm $n \geq n_0$, için $c_0 n \leq f(n) \leq c_1 n$ olsun.

Önce $T(n) = O(n)$ olduğunu gösteririz.

Taban durumunda yeterince büyük bir d_1 sabiti geçer ve $T(n) < d_1 n \lg n$ elde ederiz.

Tümevarım adımında tüm $k < n$ için, $T(k) < d_1 n \lg n$ olduğunu varsayın. Bu durumda $k = n$ için

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + c_1 n \\ &\leq d_1 \frac{n}{5} \lg\left(\frac{n}{5}\right) + d_1 \frac{4n}{5} \lg\left(\frac{4n}{5}\right) + c_1 n \\ &= d_1 n \lg n - \frac{d_1 n}{5} \lg 5 - \frac{4d_1 n}{5} \lg\left(\frac{5}{4}\right) + c_1 n \\ &= d_1 n \lg n - n \left(\left(\frac{\lg 5 + 4 \lg(5/4)}{5} \right) d_1 - c_1 \right). \end{aligned}$$

$d_1 > 5c_1 / (\lg 5 + 4\lg(5/4))$ seçtiğimiz sürece kalan negative olur, böylece tümevarımla $T(n) = O(n \lg n)$ çıkar.

$T(n) = \Omega(n)$ olduğunu göstermek için, aynı matematiği kullanabiliriz.

Taban durumu için yeterince küçük bir d_0 sabiti seçeriz ve $T(n) > d_0 n \lg n$ olur.

Tüme varım adımında tüm $k < n$ için, $T(k) > d_0 n \lg n$ olduğunu varsayın. Bu durumda $k = n$ için:

$$\begin{aligned} T(n) &\geq T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + c_0 n \\ &\geq d_0 \frac{n}{5} \lg\left(\frac{n}{5}\right) + d_0 \frac{4n}{5} \lg\left(\frac{4n}{5}\right) + c_0 n \\ &= d_0 n \lg n + n \left(c_0 - \left(\frac{\lg 5 + 4 \lg(5/4)}{5} \right) d_0 \right). \end{aligned}$$

Kalan $d_0 < 5c_0 / (\lg 5 + 4\lg(5/4))$ olduğu sürece pozitifdir. Böylece $T(n) = \Omega(n \lg n)$ olur.

(j) $T(n) = \sqrt{n} T(\sqrt{n}) + 100n$

Çözüm: burada ana teorem doğrudan geçerli değildir. $S(n) = T(n)/n$ seçin. Yineleme $S(n) = S(\sqrt{n}) + 100$ olur. Bu yinelemenin çözümü $S(n) = \Theta(\lg \lg n)$ ' dir. (bunu bir özyineleme ağacı kullanarak ya da $m = \lg n$ diyerek yapabilirsiniz) Böylece $T(n) = \Theta(n \lg \lg n)$ ' dir.

Problem 1-3. Tek doruklu arama (Unimodal Search)

Bir $A[1..n]$ dizilimi, eğer artan bir diziyi takip eden azalan bir dizi varsa unimodal ya da **tek dorukludur**; daha kesin bir anlatımla $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ dizisinde

- $A[i] < A[i + 1]$ tüm $1 \leq i < m$ için ve
- $A[i] > A[i + 1]$ tüm $m \leq i < n$ için.

Özellikle $A[m]$ maksimum elemandır ve $(A[m - 1]$ ve $A[m + 1])$ elemanları tarafından çevrili tek yerel maksimumdur.

- (a) Tek doruklu giriş dizilimi $A[1..n]$ için $O(\lg n)$ süresinde maksimum elemanı hesaplayacak algoritmayı bulun. Algoritmanızın doğruluğunu kanıtlayın ve koşma süresindeki sınırı kanıtlayın.

Çözüm: Tek doruklu dizilimlerin tanımı gereği her $1 \leq i < n$ için, ya $A[i] < A[i + 1]$ ya da $A[i] > A[i + 1]$ 'dir. Anafikir bu iki durumu ayırt edebilmektir:

1. Tek doruklu dizilimlerin tanımı gereği, eğer $A[i] < A[i + 1]$ ise, $A[1..n]$ 'nin en büyük elemanı $A[i + 1..n]$ 'nin içindedir.
2. Benzer şekilde, eğer $A[i] > A[i + 1]$ ise, $A[1..n]$ 'nin en büyük elemanı $A[1..i]$ 'nin içindedir.

Bu aşağıdaki böl-ve-fethet çözümüne yol açar (bunun ikili aramaya olan benzerliğine dikkat edin):

```
1  a, b ← 1, n
2  while a < b
3      do mid ← ⌊ (a + b)/2 ⌋
4          if A[mid] < A[mid + 1]
5              then a ← mid + 1
6          if A[mid] > A[mid + 1]
7              then b ← mid
8  return A[a]
```

Ön koşul bize bir tek-doruklu $A[1..n]$ diziliminin verilmesidir. Son koşul $A[a]$ 'nin $A[1..n]$ 'nin en büyük elemanı olmasıdır. Döngü için " $A[1..n]$ 'nin en büyük elemanının $A[a..b]$ 'nin içindedir ve $a \leq b$ 'dir." değişmezini öneririz.

Döngü tamamlandığında $a \geq b$ (çünkü döngü durumu geçersizdir) ve $a \leq b$ (döngü değişmezinden dolayı) olur. Bu nedenle $a = b$ olur ve döngü değişmezinin ilk kısmına bağlı olarak $A[1..n]$ 'nin en büyük elemanı $A[a]$ 'ya eşittir.

Değişmezin doğruluğunu kanıtlamak için Tümevarım kullanırız. Başlangıçta $a=1$ ve $b=n$ olduğundan değişmez kolaylıkla sağlanır. Değişmezin döngünün başında geçerli olduğunu farzedin. Bu durumda $A[1..n]$ 'nin en büyük elemanının $A[a..b]$ 'nin içinde olduğunu biliriz. $A[a..b]$ 'nin de tek-doruklu olduğuna dikkat edin. Eğer $A[mid] < A[mid + 1]$ ise, 1. durum uyarınca $A[a..b]$ 'nin en büyük elemanı $A[mid] < A[mid + 1]$ içinde olur. Böylece 4. satırda $a \leftarrow mid + 1$ olduğunda ve b değişmediğinde en büyük eleman yine $A[a..b]$ içindedir.

Kanıtlamayı tamamlamak için değişmezin $a \leq b$ olduğundaki 2. durumunda doğru olduğunu göstermeliyiz. Döngünün başında $a < b$ 'dir. Yani $a \leq \lfloor (a + b)/2 \rfloor < b$. Bunun anlamı $a \leq mid < b$ olduğu ve 4. veya 5. satırdan sonra a ile b 'nin güncellenerek $a \leq b$ 'nin yeniden geçerli olmasıdır.

Böl ve fethet yaklaşımı şu koşma süresini verir: $T(n) = T(n/2) + O(1) = O(\lg n)$.

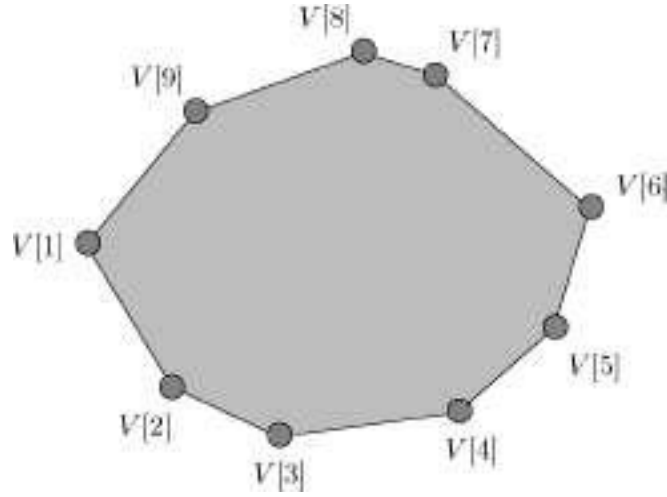
Bir poligonun tüm iç açıları 180° 'den küçükse, ve hiçbir kenar birbirini kesmiyorsa o poligon, konveks yani iç bükeydir. Şekil 1' de bir örnek verilmiştir. İçbükey bir poligonu biz $V[1..n]$ dizilimiyle gösteririz ve bu dizilimdeki her eleman poligonun bir köşesini (x,y) koordinat çiftleri olarak tanımlar. $V[1]$ köşesi minimum x değeri olan köşe olarak verilmiştir ve $V[1..n]$ köşeleri şekilde olduğu gibi satin aksi istikametinde sıralanmıştır. Köşelerin tüm x koordinatlarının ve y koordinatlarının farklı olduklarını varsayabilirsiniz.

(b) Maksimum x koordinatlı köşeyi $O(\lg n)$ süresinde bulacak algoritmayı belirleyin.

Çözüm: Köşelerin x -koordinatlarının tek doruklu bir dizilim oluşturduğuna dikkat edin; (a) şikkını kullanarak en büyük x - koordinatı olan köşeyi $O(\lg n)$ sürede bulabiliriz.

(c) Maksimum y koordinatlı köşeyi $O(\lg n)$ süresinde bulacak algoritmayı belirleyin.

Çözüm: En büyük x - koordinatı (konağı) olan $V[\max]$ köşesini bulduktan sonra , $V[\max]$, $V[\max+1]$,....., $V[n - 1]$, $V[n]$, $V[1]$ deki y - koordinatlarının bir tek doruklu dizilim oluşturduğuna $V[1..n]$ ' nin en büyük y - koordinatının da bu dizilimin içinde olduğuna dikkat edin. En büyük y - koordinatlı köşe gene (a) şıkkıyla bulunabilir. Toplam koşma süresi $\Theta(\lg n)$ ' dir.



Şekil 1: $V[1.. 9]$ diziliminin bir iç bükey poligon şeklinde gösterilmesine örnek. $V[1]$ en küçük x koordinatı değeri olan köşedir ve $V[1.. 9]$ saatin ters yönünde sıralanmıştır.