Üs Almayı Tanımlama

Eksiklik teoremlerini ispatlarken, üs almayı aritmetik dilinin en yalın sembolleri arasında saydık. Bu kullanışlı bir tercihti, çünkü sonlu bir sayılar kümesini tek bir sayı ile kodlamayı kolaylaştırdı. Evet, kullanışlı bir ilaveydi, ama zorunsuzdu. Bütün sonuçlarımızı, "E" yi sembollerinden dışlayan ve (Q7) ile (Q8)'i Robinson aritmetiğinin aksiyomlarından saymayan bir tür sınırlandırılmış aritmetik dilinde ispatlayabiliriz.

İspat, ki Gödel' in ilk makalesinin bir parçasıdır, sayılar kuramına ait şu çarpıcı teoremi kullanır:

> **Çin Kalan Teoremi (Qin Jiushao).** Aralarında asal ve 1'den büyük p_0, $p_1,\ldots,p_n$ tamsayıları (yani:herhangi iki p_i' nin 1den başka ortak böleni yok) ile her a_i için $a_i<p_i$ olan bir $a_0,a_1,\ldots,a_n$ dizisi için öyle bir c sayısı bulabiliriz ki her i için a_i c'yi p'ye bölmenin kalanıdır.

İspat: Önce, q ve p aralarında asal olurlarsa her zaman qc = pd +1' i sağlayacak c ve d' yi bulabileceğimizi gösteririz. Bunu yaparken, c ve d için qc = pd + r' yi sağlayan en küçük pozitif tamsayı olan r' yi buluruz ve *reductio ad absurdum* için r > 1' i varsayarız. Böylelikle iki durumla karşılaşırız.

1.Durum: r, q' yu bölmez. Durum böyle olunca, q + s = re' yi sağlayan sıfırdan büyük bir e ile 0 < s < r' ye uyan bir s buluruz. Öyleyse qce = pde + re, ve dolayısıyla q(ce-1) = pde + s olur. Bu durum r' nin en küçük oluşuyla çelişir.

2.Durum: r, q' yu böler. O zaman r, p' yi bölmez ve dolayısıyla $p + t = rf$' yi sağlayan sıfırdan büyük bir f ile $0 < t < r$' ye uygun bir t bulabiliriz. Yani $qcf = pdf + rf$, dolayısıyla da $qcf = p(df -1) + t$ olur. Ve bu yine r' nin en küçük oluşuyla çelişir.

Şimdi Q, p_i' lerin çarpımı ve q_i, Q' nun p_i' ye bölümü olsun. Buna göre q_i ve p_i aralarında asaldır ve böylece $q_i \cdot c_i = p_i d_i + 1$ için c_i ve d_i' yi bulabiliriz. $q_i \cdot c_i$' nin p_i' ye bölümünden kalan 1'e eşittir ve bundan dolayı $q_i \cdot c_i \cdot a_i$' nin p_i' ye bölümünden kalan a_i' dir. e, $\Sigma q_j \cdot c_j \cdot a_j$ toplamı olsun. p_i, qi' den farklı bütün q_j' leri böler; yani e' nin p_i' ye bölümünden kalanla $q_i \cdot c_i \cdot a_i$' yi p_i' ye bölmekten kalan aynıdır ve a_i' dir. ⊠

Şimdi de Gödel'in β-fonksiyonunu tanımlayalım. β(u,v,w), u' nun $(v \cdot w) + 1$' e bölümünden kalan olsun. β aritmetik dilinin bağlı bir tamdeyimiyle tanımlanabilir. $x > 0$ için, şu tamdeyim gerçekleniyorsa, ve ancak böyleyse, $(xEy) = z$ olur:

$$(\exists u)(\exists v)((\beta(u,v,0) = 1 \wedge (\forall w < y)\beta(u,v,sw) = (\beta(u,v,w) \cdot x)) \wedge \beta(u,v,y) = z).$$

Bu ifadenin sağdan-sola kısmı aşikardır. Zor olan ifadeyi soldan sağa doğrulayan u ile v' yi bulmaktır. x, y, z için $(xEy) = z$ olduğunda, $v = z!$ ($\leq z$ olan pozitif tamsayıların çarpımı) olsun. $s < t \leq z$ ise, $(s \cdot v)+1$ ile $(t \cdot v)+1$ aralarında asaldır; p bir asal sayı olduğundan ve ikisini de böldüğünden, p $(t-s)v$' yi böler ve de $(t-s)$, v' nin çarpanlarından biri olduğundan, p v' yi böler. Bu bizim, p' nin $(t \cdot v)+1$' i böldüğü varsayımımızın aksine, $(t \cdot v)+1$' in p' ye bölümünden kalanın 1 olduğu sonucuna varmamızı sağlar. Çin Kalan

Teoremini kullanarak u’ yu bulalım ki, her t≤y için u’ yu (t·v)+1’ e bölünce kalan xEt olsun.☒

Tek ilgilendiğimiz aritmetik dili olduğu sürece, üs almanın en yalın değil de tanımlanmış kabul edilmesi salt teknik bir meseledir. Aritmetik dili dışındaki dillerle açıklanan kuramların, Robinson’ un aritmetiğini başka kuramlara çevirmek yoluyla karar verilemez olduklarını göstermeye çalışırken, üs almanın kullanışlılığı görünür hale gelir. Bu gösterimi icra ederken, üs almayla ilgili bir sorunumuz yoksa, işimiz çok daha kolaylaşır.

(Q7) ve (Q8) üs almanın yinelemeli tanımıdır ve Gödel’ in beta fonksiyonunu bu yinelemeli tanımı açık bir tanıma dönüştürmek için kullanabiliriz. İşlemi bir adım daha öteye götürüp çarpmanın yinelemeli tanımı olan (Q5) ve (Q6)’ yı, çarpmayı dilin temel işlemlerinden biri yaparak, açık bir tanıma dönüştüremeyiz. Bunu, “0”, “s”, “+” ve “<” sembollerini barındıran dilin standart modelde doğru olan cümlelerinin kümesi için bir karar verme yönteminin bulunduğunu göstermiş olan Mojzesz Presburger’ in 1929 tarihli teoreminden çıkarırız. “·” nin eklenmesi bize karar verilemez bir kuram verir, öyleyse “·” açıkça tanımlanabilir olmamalıdır.[1]

1

[1] Şu nokta bahsetmeye değer olabilir: “0”,”<” ve ”s” nin tümü “+” ile tanımlanabilir. “x=0”, “(x+x)=x” olarak tanımlanabilir.”x<y”, “(~x=y ∧ (∃z)(x+z)=y)” ile tanımlanır. “sx=y” ye karşılık “(∀z)(x<z ↔ (y=z V y<z))” yi kullanırız. Presburger’ in teoreminin önemli yönü çarpmanın toplamayla tanımlanamayacağıdır.