İspatlanabilirlik Mantığı

Mantık II

İspatlanabilirliğin resmini daha iyi çizmek için kiplik mantığının yöntemlerini kullanıma sokmak istiyoruz. Aksi söylenmedikçe, Γ, PA'yı barındıran ve hiçbir yanlış Σ cümlesini içermeyen, yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış bir aritmetik kuramı olarak kabul edilecektir. "İspatlanabilirlik", Γ'da ispatlanabilirlik anlamına gelecek ve "Bew", "Bew_Γ"nın kısaltması olacaktır. "$\Box\phi$"nin "$Bew([\ulcorner\phi\urcorner])$" anlamına geldiğini kabul edersek, Löb Teoremi'yle (L1)'den (L3)'e Löb Koşulları ve benzerleri dosdoğru biçimde kiplik mantığı ilkelerine dönüşecektir. Bu yolla elde ettiğimiz kiplik sistemi en yaygın sistemlerden biri değildir - en yaygınlarınının hepsinde KT yer alır[1] - ancak yine de kiplik mantığı yöntemleri bu sisteme verimli bir biçimde uygulanabilir.

Kiplikli önermeler dizgesini ifade ederken kullandığımız dil için verilen bir *aritmetik yorum*, her bir kiplikli tamdeyimle bir aritmetik tamdeyimini eşleştiren, şu sınırlamalara uygun i gibi bir fonksiyondur:

- $i(\phi \vee \psi) = (i(\phi) \vee i(\psi))$
- $i(\phi \wedge \psi) = (i(\phi) \wedge i(\psi))$
- $i(\phi \rightarrow \psi) = (i(\phi) \rightarrow i(\psi))$
- $i(\phi \leftrightarrow \psi) = (i(\phi) \leftrightarrow i(\psi))$
- $i(\sim \phi) = \sim i(\phi)$
- $i(\Box\phi) = Bew([\ulcorner i(\phi)\urcorner])$

ϕ gibi kiplikli bir tamdeyim, i gibi her bir aritmetik yorum için $i(\phi)$ ispatlanabiliyor ise, ve ancak böyleyse, *her zaman ispatlanabilir*dir. ϕ, i gibi her aritmetik yorum için $i(\phi)$ doğruysa, ve ancak böyleyse, *her zaman doğrudur*.

[1] Bunun en belirgin istisnası, "$\Box\phi$"nin, "ϕ ahlaki olarak gereklidir" ve "$\Diamond\phi$"nin "ϕ ahlaki olarak izin verilirdir" olarak okunduğu deontik mantık sistemleridir. Ahlaki olarak kusursuz bir dünyada yaşamadığımızdan, doğru olan herşey ahlaki olarak izin verilir değildir.

Löb'ün (L1) koşulu, her zaman ispatlanabilir olan tamdeyimler kümesinin Zorunlulama altında kapalı olduğunu söyler. Bundan, (4) taslağının örneklemelerinin her zaman doğru oldukları çıkar. (L2) ise bunların her zaman ispatlanabilir de olduklarını söyler. Son olarak (L3)'e göre (K) taslağının örneklemeleri her zaman ispatlanabilirdir. Her zaman ispatlanabilir cümlelerin kümesi Totolojik Sonuç (TS) altında kapalı olduğundan, diyebiliriz ki bu küme K4'ü kapsayan bir normal kiplik sistemidir.

Löb Teoremi, bize, şu taslağın bütün örneklemelerinin her zaman doğru olduğunu söyler:

(L) $(\Box(\Box\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \Box\phi)$

Löb Teoremi'nin kanıdı, (L) taslağının örneklemelerinin her zaman doğru olduğu sonucunu verecek şekilde formelleştirilebilir. GL ('Gödel-Löb' yerine) hem (4)'ü hem de (L)'yi barındıran en küçük normal kiplik sistemi ise, her-zaman-ispatlanabilir cümleler kümesinin GL'yi barındırdığı görülür. Dick de Jongh (4) taslağını barındırma özelliğini saymanın gereksiz olduğunu göstermiş olduğundan GL, (L)'yi barındıran en küçük normal kiplik sistemi olarak da nitelenebilir.

İspatlanabilirlik mantığının Robert Solovay tarafından elde edilmiş[2] olan ana teoremi her zaman ispatlanabilir tamdeyimler kümesini kesin bir şekilde niteler: Her zaman ispatlanabilir tamdeyimler sınıfı, GL'dir.

Solovay'in teoremini kanıtlamaya girişmeden önce GL'nin daha iyi bir nitelemesine ihtiyacımız var. Diyelim ki $\langle W, R, a\rangle$ biçimindeki bir üçlü (a, W'nin bir öğesi ve R de W üzerinde tanımlı bir bağıntı olmak kaydıyla), şu koşulları karşılıyorsa bir sonlu ağaçtır:

- Sonluluk: W, sonludur.
- Geçişlilik: Her Ruv ve Rvw olduğunda, Ruw olur
- Yansımasızlık: Hiçbir zaman Rww olmaz.
- a'nın gövde oluşu: $w \in W$ ise, ya $a = w$ ya da Raw olur.
- Dal-bağlantı: Ruw ve Rvw ise, ya Ruv, ya $a = w$ ya da Raw olur.

Sonlu ağacı en iyi temsil edecek örnek, üyeleri sonlu diziler olan, her bir üyesinin başlangıç dilimi de kendi üyesi olan, sonlu ve boş olmayan bir kümedir. Ruv, v u'yu genişletiyorsa, ve ancak böyleyse, doğrudur.

[2] "Provability Interpretations of Modal Logic", *Israel Journal of Mathematics* 25 (1976): 287-304. Kanıtlanabilirlik mantığının eksiksiz serimlemesi şu kitapta verilir: George Boolos, *The Logic of Provability* (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).

$\langle W, R, a\rangle$ sonlu ağaç olmak kaydıyla, $\langle W, R, I, a\rangle$ biçiminde bir yorum için, R'nin geçişli olmasına dayanarak şunu biliyoruz: modelin her dünyasında doğru olan cümlelerin kümesi, (4)'ü barındıran bir normal kiplik sistemidir. Görmek istediğimiz, bu kümenin (L)'yi de barındırıyor olduğudur. $w \in W$, ve $\Box\phi$, w'de yanlış olsun. O halde w'den erişilebilir olan öyle bir dünya vardır ki ϕ bu dünyada yanlıştır; dolayısıyla en dipte yer alan[3] v gibi w'nin erişebildiği öyle bir dünya vardır ki ϕ, v'de yanlıştır. $\Box\phi$, v'de doğrudur, öyleyse $(\Box\phi \rightarrow \phi)$ v'de, ve $\Box(\Box\phi \rightarrow \phi)$ de w'de yanlıştır. O halde $(\Box(\Box\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \Box\phi)$, her dünyada doğrudur. Böylece, şu karşılıklı koşullunun sağdan-sola giden parçasını[4] kanıtlamış oluyoruz:

Teorem. $\langle W, R, a\rangle$ sonlu ağaç olmak üzere, bir tümce, GL'nin bir öğesiyse, ve ancak öyleyse,$\langle W, R, I, a\rangle$ gibi her modelde doğrudur.

Kanıt. χ, GL'de yer almıyor olsun. $\langle W, R, a\rangle$ sonlu ağaç olmak üzere, $\langle W, R, I, a\rangle$ biçiminde χ'nin yanlış olduğu bir model kurmak istiyoruz. Önceden kullanmış olduğumuz en çokça tutarlı cümle kümelerine dayanan inşa bize bir sonlu ağaç vermeyecektir. Herşeyin sonlu olmasını sağlamak için, bütün cümlelere değil, yalnızca χ'nin altcümleleri ya da χ'nin altcümlelerinin değillemeleri olan cümlelere bakıyoruz.[5] χ, GL'nin bir öğesi olmadığı için, şu özelliklere sahip a^* gibi bir cümleler kümesi bulabiliriz:

- $\sim \chi$, a^*'nın bir öğesidir.
- a^*, GL-tutarlıdır.
- a^*'nın her üyesi, ya χ'nin bir altcümlesi, ya da χ'nin bir altcümlesinin değillemesidir.

[3]Ancak biri ya da ikisi çocukluğunu çiftlikte geçirmiş olan matematikçi yazarları izleyerek, ben de, ağaçlar sanki aşağı doğru büyüyormuş, gövdeleri tepede ve yaprakları dipteymiş gibi konuşuyorum.

[4]İngilizce'den farklı olarak Türkçe sözdizimi karşılıklı koşulluları bakışımlı olarak ifade etmeye el vermediğinden karşılıklı koşulluluğu sağdan sola ve soldan sağa giden bakışımlı bir ilişki olarak tasarlamamız gerektiğinde aklımıza doğal dil yazımını (örneğin, "hava kapalıysa, ve ancak öyleyse, mutsuzum") değil, "$\leftrightarrow$" ekleminin kullanıldığı yazımı (yani, "mutsuzum$\leftrightarrow$hava kapalı") getirmeliyiz.

[5]Kural modelin gördüğü işi sonlu bir modele gördürdüğümüz bu kurulum, kiplik mantıkçılarının kiplik sistemlerinin saptanabilir olduğunu kanıtlarken sık sık başvurdukları bir yöntemdir. Örneğin bunlardan birisi, bir tümce KT4'te yer almadığında, bu tümcenin yanlış olduğu sonlu, yansımalı, geçişli bir model kurulabileceğini göstererek KT4'ün saptanabilir olduğunu gösterir. Kural çerçevesinin bize sağladığı şey sonsuz bir modeldir ki bu işimize yaramayacaktır. GL'nin eksiksizliği için verdiğimiz kanıdın şapkadan tavşan çıkarma havasında oluşu onu doğal ortamından, yani kiplik mantıkları kuramından yalıtarak sunuyor olmamızdan kaynaklanır.

- χ'nin her altcümlesi için, ya altcümlenin kendisi ya da değillemesi a^*'da yer alır.

a^*'yı oluşturmak için χ'nin altcümleleri üzerinden tek tek geçeriz. Her bir cümle için, ya o cümlenin kendisini ya da değillemesini kümemize ekleriz.

W^*, öğeleri χ'nin altcümleleri ve onların değillemeleri olan en çokça GL-tutarlı tüm kümelerin kümesi olsun. Yani, bir cümle kümesi, ancak yukarıdaki dört koşuldan son üçünü karşılıyorsa, W^*'de yer alacaktır. w^*, W^*'nin bir öğesi ve ϕ, χ'de geçen bir bölümsüz cümle olmak üzere şunu belirleyeceğiz: $\phi \in w^*$ ise, ve ancak böyleyse, $I^*(\phi, w^*) = 1$. Burada marifet R^*erişilebilirlik ilişkisini tanımlamakta. Tanım şöyle: şu koşullar karşılanıyor ise, ve ancak böyleyse, $R^*w^*v^*$ olur:

- w^*'nin öğesi olan $\Box\phi$ gibi her cümle için, hem $\Box\phi$ hem de ϕ, v^*'nin öğesidir.
- θ gibi öyle bir cümle vardır ki $\Box\theta$, v^*'de yer almakla birlikte w^*'de yer almaz.

χ'nin altcümlesi olan ψ gibi her bir cümle için, ψ'nin, w^*'nin öğesiyse, ve ancak böyleyse, w^*'de, $\langle W^*, R^*, I^*, a^* \rangle$ modeli içinde doğru olduğunun ispatı tek bir kısım dışında basmakalıptır. Göstermemiz gereken şudur: $\Box\psi$, χ'nin w^*'de yer almayan bir altcümlesiyse, $R^*w^*v^*$'yi sağlayan ve χ'yi barındırmayan bir v^* vardır. Bunu göstermek için, $\{\sim\psi, \Box\psi\} \cup \{\phi : \Box\phi \in w^*\} \cup \{\Box\phi : \Box\phi \in w^*\}$ birleşiminin GL-tutarlı olduğunu göstermemiz gerekir. Bunu yaparsak, v^*'yi, W^*'nin bu kümeyi barındıran bir üyesi olarak alabiliriz. Bu küme GL-tutarlıysa, her bir $\Box\phi_i$, w^*'de yer almak kaydıyla, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ gibi öyle bir dizi bulabiliriz ki şu cümle GL'de yer alır:

$$((\Box\phi_1 \wedge \phi_1) \to ((\Box\phi_2 \wedge \phi_2) \to \ldots \to ((\Box\phi_n \wedge \phi_n) \to (\Box\psi \to \psi))\ldots)).$$

GL normal olduğu için şu cümle GL'de yer alır:

$$(\Box(\Box\phi_1 \wedge \phi_1) \to (\Box(\Box\phi_2 \wedge \phi_2) \to \ldots \to (\Box(\Box\phi_n \wedge \phi_n) \to \Box(\Box\psi \to \psi))\ldots)).$$

GL K4'ü kapsadığından, her bir i için $(\Box\phi_i \to \Box(\Box\phi_i \wedge \phi_i))$ GL'de yer alır, ayrıca GL (L)'yi barındırdığından, $(\Box(\Box\psi \to \psi) \to \Box\psi)$ cümlesi de GL'de yer alır. Sonuç olarak, şu cümle GL'de yer alır:

$$(\Box\phi_1 \to (\Box\phi_2 \to \ldots \to (\Box\phi_n \to \Box\psi_n)\ldots)).$$

$\Box\phi_i$'lerin her biri w^*'de yer aldığından, $\Box\psi$ de w^*'de yer alır. Bu bir çelişkidir.

İşimiz henüz bitmedi. $\langle W^*, R^*, a^* \rangle$ sonlu, geçişli ve yansımasız olacaktır, ama onun dal-bağlantılı olduğunu ya da W^*'nin a^* dışındaki her üyesinin a^*'dan erişilebilir olduğunu varsaymamız için hiçbir sebep yoktur. Modelimizi bir ağaca dönüştürmek için biraz kurcalamamız gerekiyor. Şimdi, "dünyalar"ımızın, a^* ile başlayan sonlu R^*-zincirleri olduğunu kabul edeceğiz. Daha kesin olarak, W'nin üyeleri, W^*'nin öğelerinden oluşan ve şu koşulları karşılayan sonlu w dizileri olacak:

- $(w)_0 = a^*$.
- $j + 1 < w'nin\,uzunluğu$ ise, $R^*\,(w)_j\,(w)_{j+1}$.

w ve v, W'de yer aldığında, ancak v, w'nin bir genişletimiyse Rwv olur. a, tek öğesi a^* olan dizidir. $j+1$, w'nin uzunluğuysa, $I(\phi, w) = I^*\left(\phi, (w)_j\right)$. O halde $\langle W, R, a \rangle$ bir ağaçtır; w, W'nin $j+1$ uzunluğunda bir öğesi ve ϕ de kiplikli bir tamdeyim olduğunda, ϕ, ancak $(w)_j$'de $\langle W^*, R^*, I^*, a^* \rangle$ modeli içinde doğruysa, w'de $\langle W, R, I, a \rangle$ modelinde doğrudur. Öyleyse χ, $\langle W, R, I, a \rangle$ sonlu ağaç modelinde yanlıştır.$\boxtimes$

Bu teorem bize GL için bir karar verme yöntemi sağlar. Bir cümle GL'de yer alıyorsa, onu türetebiliriz, gelgelelim bir cümle GL'nin dışındaysa, onun yanlış olduğu sonlu bir ağaç modeli kurabiliriz.

Şimdi asıl işe geliyoruz. GL'de yer almayan χ gibi bir cümle için, i gibi öyle bir aritmetik yorum bulmak istiyoruz ki $i(\chi)$, Γ'nın sonucu olmasın. İçinde χ'nin yanlış olduğu $\langle W, R, I, a \rangle$ gibi bir sonlu ağaç modeli bulabiliriz. W'nin, her Rij olduğunda $i < j$ olacak şekilde düzenlenmiş $1, 2, \ldots, n$ sayılarından oluştuğunu kabul etmemizde bir sorun yoktur. O halde $a = 1$. Modeli şu koşulları karşılayacak 0 gibi ek bir dünyayla genişletiyoruz: öteki her bir dünya 0'dan erişilebilirdir ve bölümsüz ϕ'ler için, $I(\phi, 0) = I(\phi, 1)$. Eninde sonunda, aritmetik yorumumuzu elde ettiğimizde, 0, *edimli dünya*, yani standart model işlevini görecektir. 1 dünyasında doğru olan cümleler standart modelde doğru olabilir ya da olmayabilirler; bu konuda önden karar vermek istemiyoruz. Yaklaşık-doğruluk mantığına döndüğümüzde, 0 dünyası başrolde olacak.

Ağacın yapısını yeniden üretecek bir aritmetik yorum arama planımız, belli bir doğruluk çizelgesine sahip bir ÖD (Önermeler Dizgesi) cümlesini bulmanın nasıl olduğunu görmeye çalışırken izlediğimiz yöntemi andırır. Orada yaptığımız, bir doğruluk çizelgesinin her bir satırı için o satırın durum betimlemesi olan bir cümle bulmak, sonra da aradığımız cümleyi verili doğruluk çizelgesinin "doğru" değerini verdiği satırların durum betimlemelerinin ayırtımı olarak almaktı. Aynı planı izleyerek, burada da, her bir j dünyası için, o dünyayı betimleyen bir σ_j cümlesi bulmak istiyoruz. Bunu yaptığımızda, aritmetik yorumumuzu, her bir bölümsüz tamdeyime, o tamdeyimin doğru olduğu dünyaların dünya-betimlemelerinin ayırtımını atayan bir fonksiyon olarak alabileceğiz. Özel olarak, her bir $j \leq n$ için şu koşulları karşılayan bir σ_j cümlesi bulacağız:

(i) PA, σ_j'lerin ayırtımını içerir.

(ii) $j \neq k$ olmak üzere, $PA \vdash \sim (\sigma_j \wedge \sigma_k)$.

(iii) Her Rjk olduğunda, $PA \vdash (\sigma_j \rightarrow \sim Bew\,([\ulcorner \sim \sigma_k \urcorner]))$.

(iv) $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $PA \vdash (\sigma_j \rightarrow Bew([\ulcorner Rjk$'yı karşılayan bütün σ_k'ların ayırtımı$\urcorner]))$. [6]

(v) σ_0 doğrudur.

Bölümsüz ϕ'ler için, j, ϕ'nin doğru olduğu bir dünya olmak üzere, $i\,(\phi)$'nin σ_j'lerin ayırtımı olduğunu kabul ederek i aritmetik yorumunun tanımını verdiğimizde şunu elde ederiz:

Sav. $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, her j ve ϕ gibi her kiplikli tamdeyim için, ϕ, j'de doğruysa, PA $\vdash (\sigma_j \rightarrow i\,(\phi))$.

Kanıt. Tamdeyimlerin karmaşıklıkları üzerine tümevarım yaparak şunu ispatlarız: ϕ tamdeyim olmak üzere, ϕ, j'de doğruysa, σ_j, $i\,(\phi)$'nin ayırtılarından biridir, yok ϕ, j'de yanlışsa, (ii)'den biliriz ki σ_j, $i\,(\phi)$'nin ayırtılarının her biriyle ispat kuramı bakımından bağdaşmazdır. ϕ, daha yalın tamdeyimlerin ÖD eklemleriyle birleştirilmesinden oluşuyorsa ispat kolayca verileceği için burada ele almıyorum. Şimdi asıl olarak ilgilenmemiz gereken, ϕ'nin $\Box\psi$ biçiminde olduğu durumda bu iddianın doğru olup olmadığıdır.

j'den erişilebilir olan dünyalar $k_1, k_2, \ldots, k_m$ olsun. $\Box\psi$, j'de doğruysa, tümevarım varsayımı dolayısıyla, $1 \leq h \leq m$ olmak üzere her bir h için, $PA \vdash (\sigma_{k_h} \rightarrow i\,(\psi))$ olur. Öyleyse, $PA \vdash ((\sigma_{k_1} \vee \sigma_{k_2} \vee \ldots \vee \sigma_{k_m}) \rightarrow i\,(\psi))$. (L1) ve (L3) dolayısıyla, $PA \vdash (Bew\,([\ulcorner(\sigma_{k_1} \vee \sigma_{k_2} \vee \ldots \vee \sigma_{k_m})\urcorner]) \rightarrow Bew\,([i\,(\psi)]))$. (iv) dolayısıyla[7] $PA \vdash (\sigma_j \rightarrow Bew\,([\ulcorner(\sigma_{k_1} \vee \sigma_{k_2} \vee \ldots \vee \sigma_{k_m})\urcorner]))$ olacağı için, $PA \vdash (\sigma_j \rightarrow i\,(\Box\psi))$.

[6] j'den erişilebilir hiçbir dünya olmaması durumunda, Rjk'yi karşılayan σ_k'ların "ayırtımı"ndan mantıki olarak tutarsız "$\sim 0 = 0$" cümlesini anlayacağım. Öyleyse (iv)'ün bize söylediği şudur: j'den erişilebilir hiçbir dünya yoksa, PA $\vdash (\sigma_j \rightarrow \sim Con\,(\Gamma))$.

[7] Burası kanıdın $j = 0$ için tıkandığı yerdir, çünkü (iv), yalnızca $1 \leq j \leq n$ olduğu durumlarda geçerlidir. Her-zaman-doğru tamdeyimlerin mantığına döndüğümüzde, Sav'ın 0 dünyası için geçerli olan sınırlandırılmış bir örneğini geliştireceğiz.

Öteki taraftan, $\Box\psi$, j'de yanlışsa, içinde ψ'nin yanlış olduğu, j'den erişilebilir k gibi bir dünya vardır. Tümevarım varsayımı dolayısıyla, $PA \vdash (\sigma_k \to \sim i(\psi))$. Bundan, (L1) ve (L3) yoluyla $\Gamma \vdash (Bew([\ulcorner i(\psi)\urcorner]) \to Bew([\ulcorner \sim \sigma_k \urcorner]))$, dolayısıyla $PA \vdash (\sim Bew([\ulcorner \sim \sigma_k \urcorner]) \to \sim i(\Box\psi))$ olduğu çıkar. Bundan da (iii) yoluyla $PA \vdash (\sigma_j \to \sim i(\Box\psi))$.⊠

Sav'a dayanarak biliyoruz ki PA $\vdash (\sim Bew([\ulcorner \sim \sigma_k \urcorner]) \to \sim i(\Box\psi))$. (L1) ve (L3) yoluyla bundan PA $\vdash (Bew([\ulcorner i(\chi)\urcorner]) \to Bew([\ulcorner \sim \sigma_1 \urcorner]))$, ve (iii) yoluyla da PA $\vdash (\sigma_0 \to \sim Bew([\ulcorner i(\chi)\urcorner]))$ olduğu çıkar. (v)'e göre σ_0 doğru olduğundan, bundan $Bew([\ulcorner i(\chi)\urcorner])$'nin yanlış olduğu, dolayısıyla $i(\chi)$'nin Γ'nın bir sonucu olmadığı çıkar.

Geriye σ_j'leri bulmak kalıyor. Solovay, hangi tamdeyimleri yazmak gerektiğini belirlemek için epey bir ustalık göstermek zorunda kaldı; ve ben bu kurulumu başlatma girişiminde bulunmayacağım. Tek yapacağım, tamdeyimleri yazıp onların işlediğini doğrulamak olacak. Şu şekilde $f(x, y)$ gibi bir tamdeyim tanımlayalım:

- z, tek bağsız değişkeni x olan bir tamdeyimin Gödel sayısı değilse, $f(y, z) = 0$.

Diyelim ki z, tek bağsız değişkeni x olan $\psi(x)$ gibi bir tamdeyimin Gödel sayısı. $f(y, z)$'yi x üzerine yapılan tümevarım yoluyla tanımlarız:

- $f(0, z) = 0$
- $f(m, z) = j$ ve m, Γ'da $\psi([k])$'nın bir ispatı ve Rjk ise, $f(m+1, z) = k$.
- Öteki türlü, $f(m+1, z) = f(m, z)$.

$z = \ulcorner \psi(x) \urcorner$ ise, y'ye verilecek farklı değerler için $f(y, z)$'nin değerini hesaplarken $f(0, z) = 0$'la başlayıp ağaçtan aşağı doğru ilerleriz. Belli bir noktada j boğumuna gelmiş ve Rjk'yı sağlayacak şekilde $\ulcorner \psi[k] \urcorner$'nın ispatını elde etmişsek, k boğumuna atlarız. Ağaç sonlu olduğu için, bu atlamalar bir yerde sonlanmak zorunda kalacaktır.

f bir yinelemeli tam fonksiyon olduğundan f'nin yinelemeli tanımını bir Σ açık tanımı olarak kodlayabiliriz; bunu yaparsak, f'nin temel özelliklerini PA'da ispatlayabiliriz. Örneğin, sonlu kümeler için rakam kodları bulma becerimizi kullanarak, her bir z için, y'nin bir fonksiyonu olarak görülen $f(y, z)$ fonksiyonunun, ardalanı $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin bir altkümesi olan, bir azalmayan tam fonksiyon olduğunu ispatlayabiliriz. Kendine Gönderim Lemması, şunu karşılayan $\sigma(x)$ gibi bir tamdeyim bulmamızı sağlar: $PA \vdash (\forall z)(\sigma(z) \leftrightarrow \{f(y, [\ulcorner \sim \sigma(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesi z'ye eşittir).

PA şunu ispatlar: her bir z için, $\{f(y, z) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesi 0 ile n arasında (sınırlar dahil olmak üzere) yer alır. Daha belirli olaraksa, PA, $\{f(y, \ulcorner \sim \sigma(x) \urcorner) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesinin 0 ile n arasında (sınırlar dahil olmak üzere) yer aldığını ispatlar. Bu bize (i)'i verir.

$j \neq k$ ise, PA, j ve k'dan her ikisinin de $\{f(y, \ulcorner \sim \sigma(x) \urcorner) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesine eşit olmadığını ispatlar; bu da bize (ii)'yi verir.

Tek bağsız değişkeni "x" olan $\psi(x)$ gibi bir tamdeyim alalım.

$\{f(y, \ulcorner \psi(x) \urcorner) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesi j'ye eşitse, öyle bir m vardır ki $f(m, \ulcorner \psi(x) \urcorner)$, j'ye eşittir. Rjk'yı sağlayan bir $\psi([k])$, Γ'da ispatlanabilir olsaydı, $p > m$ şeklinde $\psi([k])$'yı ispatlayan bir sayı bulunurdu. (Dikkat edelim ki bir cümle şu ya da bu şekilde ispatlanabilir ise, o cümlenin sonsuzca çok ispatı vardır, çünkü verili ispatlardan birini alıp yersiz, konu dışı laflar ekleyerek şişirebiliriz.) Öyleyse $p > m$ şeklinde, Rjk'yı karşılamak üzere $\psi([k])$'yı ispatlayan bir en küçük sayı vardır. Ancak bu durumda j'nin, $\{f(y, \ulcorner \psi(x) \urcorner) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesi olduğu kabulüne karşıt olarak, $f(p+1, \ulcorner \psi(x) \urcorner)$, k'ya eşit olurdu. Öyleyse, j, $\{f(y, \ulcorner \psi(x) \urcorner) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesiyse, Rjk'yı karşılayan hiçbir $\psi([k])$, Γ'da ispatlanabilir değildir. Bu çıkarımı formelleştirdiğimizde şunu elde ederiz: Her Rjk olduğunda

$$PA \vdash (\{f(y, [\ulcorner \psi(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}\ \textit{kümesinin en büyük öğesi} = [j] \rightarrow \backsim Bew([\ulcorner \psi([k]) \urcorner])).$$

$\psi(x)$ yerine $\sim \sigma(x)$ koyduğumuzda (iii)'ü elde ederiz.

Yine, $\psi(x)$, tek bağsız değişkeni "x" olan bir tamdeyim olsun.

(£) $PA \vdash ([j], \{f(y, [\ulcorner \psi(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}\ \textit{kümesinin en büyük}$

$\textit{öğesidir} \rightarrow (\exists y) f(y, [\ulcorner \psi(x) \urcorner]) = [j]).$

θ, Σ olmak üzere, $(\theta \rightarrow Bew([\ulcorner \theta \urcorner]))$ biçimindeki bütün cümleler PA'da ispatlanabilirdir. Bilhassa da

(¥) $PA \vdash ((\exists y) f(y, [\ulcorner \psi(x) \urcorner]) = [j] \rightarrow Bew([\ulcorner (\exists y) f(y, [\ulcorner \psi(x) \urcorner]) = [j] \urcorner]))\,.$

Dahası, $k_1, k_2, \ldots, k_m$, j'den erişilebilir dünyalar olmak üzere,

$$PA \vdash ((\exists y) f(y, [\ulcorner \psi(x) \urcorner]) = [j] \rightarrow \{f(y, [\ulcorner \psi(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}$$
$$\textit{kümesinin en büyük öğesi ya } [j]' \textit{ ye ya da } [k_1]' \textit{ e ya da } [k_2]' \textit{ ye ya da} \ldots$$
$$\textit{ya da } [k_m]' \textit{ ye eşittir}).$$

(L1) ve (L2)'yi uygulayarak şunu elde ederiz:

(€) $PA \vdash (Bew\,([\ulcorner (\exists y)\, f\,(y, [\ulcorner \psi\,(x) \urcorner]) = [j] \urcorner]) \rightarrow$

$Bew([\ulcorner \{f\,(y, [\ulcorner \psi\,(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}\ kümesinin\, en\, büyük\, öğesi$

$ya\ [j]'\, ye\, ya\, da\ [k_1]'\, e\, ya\, da\ [k_2]'\, ye\, ya\, da \ldots$

$ya\, da\ [k_m]'\, ye\, eşittir \urcorner])).$

(£), (¥) ve (€) bir araya getirildiğinde, şu elde edilir:
$PA \vdash ([j]\ , \{f\,(y, [\ulcorner \psi\,(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}\ kümesinin\, en\, büyük\, öğesidir \rightarrow$
$Bew([\ulcorner \{f\,(y, [\ulcorner \psi\,(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}\ kümesinin\, en\, büyük\, öğesi\, ya\ [j]'\, ye$
$ya\, da\ [k_1]'\, e\, ya\, da\ [k_2]'\, ye\, ya\, da \ldots ya\, da\ [k_m]'\, ye\, eşittir \urcorner])).$
$\psi\,(x)$ yerine $\sim \sigma\,(x)$ koyduğumuzda şunu elde ederiz:

($) $PA \vdash (\sigma\,([j]) \rightarrow Bew\,([\ulcorner \sigma\,([j]) \vee \sigma\,([k_1]) \vee \sigma\,([k_2]) \vee \ldots \vee \sigma\,([k_m]) \urcorner]))\,.$

$1 \leq j \leq n$ olduğunda:

$PA \vdash (\sigma\,(j) \rightarrow [j]\,,\ \{f\,(y, [\ulcorner \sim \sigma\,(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}\ kümesinin\, en\, büyük\, öğesidir)\,.$

$PA \vdash ([j]\,,\ \{f\,(y, [\ulcorner \sim \sigma\,(x) \urcorner]) : y \in \mathbb{N}\}\ kümesinin\, en\, büyük\, öğesidir \rightarrow$

$(\exists y)\, f\,(y, [\ulcorner \sim \sigma\,(x) \urcorner]) = [j]).$

$PA \vdash ((\exists y)\, f\,(y, [\ulcorner \sim \sigma\,(x) \urcorner]) = [j] \rightarrow Bew\,([\ulcorner \sim \sigma\,([j]) \urcorner]))\,.$

(¢) $PA \vdash (\sigma\,([j]) \rightarrow Bew\,([\ulcorner \sim \sigma\,([j]) \urcorner]))\,.$

İspatlanabilir cümleler kümesinin şu çıkarım formu altında kapalı olması kullanılarak

$$(\alpha \vee \beta)$$

$$\sim \alpha$$

$$\therefore \beta$$

($) ve (¢) biraraya getirildiğinde şu elde edilir:

$$PA \vdash (\sigma\,([j]) \rightarrow Bew\,([\ulcorner (\sigma\,([k_1]) \vee \sigma\,([k_2]) \vee \ldots \vee \sigma\,([k_m])) \urcorner]))$$

ki bu da (iv) önermesidir.

Son olarak, (v)'i[8] kanıtlamak, yani, $\{f(y, \ulcorner\sim \sigma(x)\urcorner) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesinin 0 olduğunu göstermek istiyoruz. *Reductio ad absurdum* için, en büyük öğe $j > 0$, j'den erişilebilir dünyalar da $k_1, k_2, \ldots, k_m$ olsun. (iv) şunu veriyordu:

$$PA \vdash (\sigma([j]) \to Bew([\ulcorner(\sigma([k_1]) \vee \sigma([k_2]) \vee \ldots \vee \sigma([k_m]))\urcorner])).$$

Her bir i için elimizde şu bulunur:

$$PA \vdash (\sigma[(k_i)] \to (\exists y) f(y, [\ulcorner\sim \sigma(x)\urcorner]) = [k_i]).$$

O halde,

$PA \vdash (\sigma([k_1]) \vee \sigma([k_2]) \vee \ldots \vee \sigma([k_m]) \to (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) =$
$[k_1] \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_2] \vee \ldots \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_m]).$

(L1) ve (L2)'yi de uygularsak:

$PA \vdash (Bew([\ulcorner\sigma([k_1]) \vee \sigma([k_2]) \vee \ldots \vee \sigma([k_m])\urcorner]) \to$
$Bew([\ulcorner(\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_1] \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) =$
$[k_2] \vee \ldots \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_m]])\urcorner).$

ve dolayısıyla

$PA \vdash (\sigma([j]) \to Bew([\ulcorner(\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) =$
$[k_1] \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_2] \vee \ldots \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_m]\urcorner])).$

Öteki taraftan, j, $\{f(y, \ulcorner\sim \sigma(x)\urcorner) : y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en büyük öğesiyse, hiçbir k_i için, $f(y, \ulcorner\sim \sigma(x)\urcorner) = k_i$ eşitliğini sağlayan bir y bulunmayacaktır, çünkü her bir k_i, j'den büyüktür. Bu gözlem PA'da formelleştirildiğinde şunu verir:

$PA \vdash \sigma([j]) \to\sim ((\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_1] \vee$
$(\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_2] \vee \ldots \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_m]).$

Sonuç olarak, $\sigma([j])$ doğru olduğundan, $((\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_1] \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_2] \vee \ldots \vee (\exists y) f(y, [\ulcorner\sigma(x)\urcorner]) = [k_m])$ ayırtımı, kabüle karşıt olarak, Γ'da ispatlanabilir olan yanlış bir Σ cümlesiyle denk olacaktır.⊠

Şimdi dikkatimizi, hangi kiplikli tamdeyimlerin her zaman doğru olduğunun belirlenmesine yönlendireceğiz. Γ'yı doğru sayarsak, her zaman ispatlanabilir bütün tamdeyimler her-zaman-doğru da olacaktır, ancak bütün her-zaman-doğru tamdeyimler her zaman ispatlanabilir olmayacaktır, çünkü her ne kadar (T)

[8] Γ'nın tüm Σ sonuçlarının doğru olduğunu kabul etmekle kalmayıp Γ'nın kendisini doğru sayıyor olsaydık, (v)'yi elde etmek işten bile sayılmazdı. $j > 0$ için, $\sigma([j])$ kendi kendinin çürütülebilirliğini bildirir, dolayısıyla, doğru olsaydı, çürütülebilir bir doğru cümle olurdu. Ne var ki Γ'yı doğru saymıyoruz, dolayısıyla Γ'da çürütülebilir olan doğru cümleler de bulunabilir. Bundan ötürü daha yapmamız gerekenler var.

taslağının bütün örneklemeleri her-zaman-doğru olacaksa da, bunlardan her-zaman-ispatlanabilir sonuçlara sahip olanlar her zaman ispatlanabilir olmakla kalacaktır. Öyle görünüyor ki her-zaman-doğru tamdeyimlerin *modus ponens* altında kapalı olduğu da anımsanırsa, bu iki gözlem, her-zaman-doğru tamdeyimlerin eksiksiz bir dökümünü vermeye yetecektir.

Uyarı: Bundan sonrası için, Γ, PA'yı kapsayan, yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış *doğru* bir kuram olarak alınacaktır.

GLS ('Gödel-Löb-Solovay' yerine), GL'yi ve (T) taslağının bütün örneklemelerini barındıran ve *modus ponens* altında kapalı olan en küçük tamdeyimler yığını olsun. Bütün totolojiler GL'de yer aldığından, GLS'nin de (TS) altında kapalı olduğunu biliyoruz.

Teorem (Solovay). χ, kiplikli bir tamdeyim olmak üzere, χ'nin '$\Box$' ile başlayan alttamdeyimleri $\Box\eta_1, \Box\eta_2, \ldots, \Box\eta_m$ olsun. Şunlar denktir:

(1) $\chi \in GLS$

(2) $(((\Box\eta_1 \to \eta_1) \wedge (\Box\eta_2 \to \eta_2) \wedge \ldots \wedge (\Box\eta_m \to \eta_m)) \to \chi) \in GL.$

(3) χ, her zaman doğrudur.

İspat. (2)'nin (1)'i, ve (1)'in (3)'ü içerdiği açıktır, öyleyse tek göstermemiz gereken (3)'ün (2)'yi içerdiğidir. Aslında, tam olarak göstereceğimiz şey (2)'nin değillemesinin (3)'ün değillemesini içerdiği olacak. $(\Box\eta_1 \to \eta_1) \wedge (\Box\eta_2 \to \eta_2) \wedge \ldots \wedge (\Box\eta_m \to \eta_m) \to \chi$ koşullusunun GL'de yer almadığı durumda, bu koşullunun 1 dünyasında yanlış olduğu, $\langle \{0, 1, \ldots, n\}, R, I, 0 \rangle$ biçiminde bir model bulmak için, daha önce izlediğimiz yöntemin aynısını izliyoruz. Göstermek istediğimiz şu: χ'nin bir tamdeyimi, 1 dünyasında doğru ise, ve ancak böyleyse, 0 dünyasında doğrudur. Bu, bölümsüz cümleler için, elimizdeki modeli 0'ı da kapsayacak şekilde genişletirken doğruluk değerlerini ileriyi düşünerek genişletme şeklimizin dolaysız sonucudur. Birletimler, ayırtımlar, koşullular, karşılıklı koşullular ve değillemeler içinse ispat kolayca verilebilir. $\Box\eta_j$, 0 dünyasında doğruysa, η_j, 0'dan erişilebilir olan her dünyada doğrudur. 1 dünyasından erişilebilir olan her dünya 0 dünyasından da erişilebilir olduğundan, η_j, 1 dünyasından erişilebilir olan her dünyada doğru olacak ve dolayısıyla $\Box\eta_j$ de 1 dünyasında doğru olacaktır. Öteki taraftan, $\Box\eta_j$, 1 dünyasında doğruysa, η_j, 1 dünyasından erişilebilir her dünyada doğrudur. 0'dan erişilebilir olup da 1'den erişilebilir olmayan tek dünya 1'in kendisidir. $(\Box\eta_j \to \eta_j)$, 1'de doğru olduğundan, η_j, 1'de doğrudur; böylece de 0'dan erişilebilir her dünyada doğru olur. O halde de $\Box\eta_j$, 0'da doğru olur.

Daha belirli olaraksa, χ , 1'de yanlış olduğu için, 0'da da yanlıştır.

Şimdi, χ'nin θ gibi her bir alttamdeyimi için, θ 0'da doğruysa, $PA \vdash (\sigma_0 \to i\,(\theta))$, θ 0'da yanlışsa, $PA \vdash (\sigma_0 \to\sim i\,(\theta))$ olduğunu göstermek istiyoruz. σ_0 doğru olduğundan, $i\,(\chi)$, gerekene uygun olarak, yanlış olacak.

Bölümsüz bir θ için verilecek ispat, $1, 2, \ldots, n$ dünyaları için daha önce verilen ispatla aynıdır. θ'nın ayırtım, birletim, koşullu, karşılıklı koşullu ve değilleme olduğu durumlardaysa ispat yine basmakalıptır.

$\Box\eta_j$, 0 dünyasında doğru olsun. Her bir $k > 0$ için, k, 0'dan erişilebilirdir, dolayısıyla η_j k'da doğrudur. Bunun, $PA \vdash (\sigma_k \to i\,(\eta_j))$ anlamına geldiğini göstermiş bulunuyoruz. η_j 1'de doğru olduğundan, ve χ'nin 1'de ve 0'da doğru olan altcümleleri aynı olduğundan, η_j 0'da da doğrudur; öyleyse tümevarım varsayımı yoluyla da $PA \vdash (\sigma_0 \to i\,(\eta_j))$. Bundan, $PA \vdash ((\sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n) \to i\,(\eta_j))$ olduğu çıkar. $PA \vdash (\sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n)$ olduğu için, $PA \vdash i\,(\eta_j)$ elde edilir. (L1) yoluyla $PA \vdash Bew\,([\ulcorner i\,(\eta_j)\urcorner])$, yani $PA \vdash i\,(\Box\eta_j)$ elde edilir, dolayısıyla da $PA \vdash (\sigma_0 \to i\,(\Box\eta_j))$ elde edilir.

Şimdi de $\Box\eta_j$ 0 dünyasında yanlış olsun. O halde η_j'nin yanlış olduğu $k > 0$ şeklinde bir dünya vardır. Bunun $PA \vdash (\sigma_k \to\sim i\,(\eta_j))$'yi içerdiğini göstcrdik. Tamdevirme kuralı, (L1), (L3) ve tekrar tamdevirme kuralı uygulanarak $PA \vdash (\sim Bew\,([\ulcorner\sim \sigma_k\urcorner]) \to\sim i\,(\Box\eta_j))$ elde edilir. (iii) bize $PA \vdash \sigma_0 \to\sim (Bew([\ulcorner\sim \sigma_k\urcorner]))$'yı verdiğinden, bundan $PA \vdash (\sigma_0 \to\sim i\,(\Box\eta_j))$ çıkar.$\boxtimes$

(2) ve (3)'ün denk olduğu ve GL için bir karar verme yönteminin bulunduğu göz önüne getirildiğinde, bir kiplikli tamdeyimin her-zaman-doğru olup olmadığını denetlemek için bir algoritma bulunduğu görülür.