Kiplik Mantığına Giriş

Sıradan mantık, cümlelerin[1] doğru ve yanlış olarak iki sınıfa ayrılmasını inceler. Kiplik mantığıysa daha inceltilmiş bir sınıflamayı araştırır: Bir cümle ya zorunludur (yani doğrudur ve başka türlü olamazdı), ya zorunsuz olarak doğrudur (yani doğrudur, ancak yanlış olabilirdi), ya zorunsuz olarak yanlıştır (yani yanlıştır, ancak doğru olabilirdi), ya da imkansızdır (yani zaten asla doğru olamazdı). Kipliğin mantıki özelliklerinin formel olmayan araştırması en azından Artistoteles kadar eskilere uzanır, ancak sembolik kiplik mantığı için geliştirilen formel sistemlerin geliştirilmesi, 1918'de C. I. Lewis'in *Sembolik Mantık Araştırmaları'nın* (A Survey of Symbolic Logic[2]) yayımlanmasıyla başlar. Bu çalışmada Lewis, önermeler dizgesiyle başlayıp buna 'zorunludur ki'yi, 'mümkündür ki'yi ve 'gerektirir'i[3] belirtecek semboller ekler. Sonra da bazı cezbedici aksiyomları uyarlama ve onlardan sonuçlar türetme yoluyla tümdengelimli formel dizgeler geliştirir.

Kipliklerin mantıki incelemesini içeriksiz sembolleştirme denemeleri olmaktan kurtaran şey mümkün dünya anlambiliminin gelişmesi olmuştur. Bunun temeli olan fikir, Tanrı'nın bütün mümkün dünyaları gözden geçirip en iyisini seçerek edimlileştirdiğini düşünen Leibniz'ten gelir. İçinde bulunduğumuz dünyanın en iyi mümkün dünya olduğu fikri, felsefeciler için bile – bkz. Voltaire'in *Candide*'i – kaçıkça olmakla birlikte faydalı bir fikir olmuştur. Kiplikli önermeler dizgesi için mümkün dünya anlamdizimleri 1940'larda J. C. C. Mc Kensie ve Alfred Tarski tarafından geliştirilmiştir[4] ve bunlar Saul Kripke tarafından 1960'larda kiplikli yüklemler dizgesine genişletilmiştir.[5] Biz burada, yalnızca yüzeyde kalacak şekilde, kiplikli önermeler dizgesinden bahsetmekle yetineceğiz.[6]

Sonsuzca çok bölümsüz cümleyi barındıran bir tür önermeler dizgesiyle başlayıp bu dizgeye 'zorunludur ki' olarak okunacak '$\Box$' işlemcisini ekleyeceğiz; öyle ki, ϕ bir cümle olduğunda

---

[1] Burada, dikkatimi bir sav bildirmek için kullanılan cümlelerle sınırlıyor, soru sormak, dilekte bulunmak ya da söz vermek için kullanılan cümleleri dışarıda bırakıyorum. Dilin bu öteki biçimlerdeki kullanımlarını kapsayan geniş çaplı bir kuram, John Searle tarafından *Söz Edimleri*'nde [*Speech Acts*, Cambridge: Cambridge University Press, 1969; Türkçe çevirisi: John Searle, *Söz Edimleri*, çev.: R. Levent Aysever, Ayraç, 2000] geliştirilmiştir.

[2] Berkeley, Calif.: University of California Press.

[3] Mantık 1'de, '→' simgesini 'içerir' şeklinde okumaya karşı yürüttüğüm tartışmayı anımsayın. Geçişli bir eylem olan 'içerir'in bir cümle eklemiyle karıştırılması Alfred North Whitehead ve Bertrand Russell'ın *Principia Mathematica*'sıyla (Cambridge: Cambridge University Press, 1910) başlar. Bkz. W. V. Quine, 'Reply to Professor Marcus', *Synthese* 20 (1961); şurada yeniden basıldı: W. V. Quine, *The Ways of Paradox*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1966.)

[4] 'On Closed Elements in Closure Algebra', *Annals of Mathematics* 47 (1946): 122-162.

[5] 'Semantical Considerations in Modal Logic', *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963): 83-94.

[6] Daha eksiksiz bir inceleme için şuralara bakılabilir: Brian Chellas, *Modal Logic*, (Cambridge: Cambridge University Press, 1980); G. E. Hughes ve Max Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic* (Routledge, 1996); ya da J. C: Beall ve Bas van Fraassen, *Possibilities and Paradox* (Oxford: Oxford University Press, 2003).

$\Box\phi$ de bir cümle olur. Lewis'in imkan için kullandığı '◊' sembolünü şu şekilde tanımlandığı haliyle alacağız:

$$\Diamond\, \phi =_{tnm} {\sim}\Box{\sim}\phi$$

Lewis'in gerektirim için kullandığı semboleyse ihtiyacımız olmayacak.

Burada bizi asıl ilgilendiren şey, kiplikli önermeler dizgesinin, '□' sembolünün 'ispatlanabilir ki', dolayısıyla da '◊' sembolünün 'tutarlıdır ki' olarak anlaşıldığı yorumu olacak.

Bir *Kripke modeli*, $\langle W, R, I, a\rangle$ biçiminde bir sıralı dörtlüdür ki W, yani *dünyalar* kümesi, boş olmayan bir kümedir; R, yani *erişilirlik bağıntısı*, W üzerinde tanımlı ikili bir bağıntıdır; I, yani yorum fonksiyonu, ϕ gibi bir cümleden ve w gibi bir dünyadan oluşan her bir $\langle\phi, w\rangle$ ikilisine 0 ya da 1 değerini atayan bir fonksiyondur; ve son olarak da $a \in W$ *edimli dünyadır*. $\langle W, R, I\rangle$ biçimindeki üçlü, bir *çerçeve* oluşturur. ϕ bölümsüz cümlesi ve w dünyası için, $I(\phi, w) = 1$ ise, ve ancak böyleyse, ϕ, w'de doğrudur. Bir birletim, bu birletilen öğelerin her ikisi de w'de doğruysa, ve ancak böyleyse, w'de doğrudur; bir ayırtım, ayırtılanların biri ya da her ikisi w'de doğruysa, ve ancak böyleyse, w'de doğrudur, ve bunun gibi. $\Box\phi$, w'de, ϕ, Rwv'ye uygun her v'de doğruysa ve ancak böyleyse, doğrudur. Bir cümle, a'da doğruysa, ve ancak böyleyse, *modelin kendisinde doğrudur*. Bir cümle, *bir çerçeveler kümesi için*, o kümenin her üyesindeki her dünyada doğruysa, ve ancak böyleyse, *geçerlidir*.

Bir *normal kiplik sistemi*, şu özellikleri taşıyan Γ gibi bir tümceler kümesidir:

- **Totolojik sonuç:** Γ'nın her totolojik sonucu Γ'da yer alır.
- **Zorunlulama:** ϕ, Γ'da yer alıyorsa, $\Box\phi$ de Γ'da yer alır.
- **(K) taslağı:** Şu aksiyom taslağının her örneklemesi Γ'da yer alır:

(K) $(\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi))$

- **Teorem.** Γ cümleler kümesi için şunlar birbirine denktir:
  1) Γ, bir normal kiplik sistemidir.
  2) Öyle bir çerçeveler sınıfı vardır ki Γ, sınıfın her üyesi için geçerli olan cümlelerin kümesidir.
  3) Ya Γ bütün cümlelerin kümesidir ya da öyle bir $\langle W, R, I\rangle$ çerçevesi vardır ki Γ, $\langle W, R, I\rangle$ için geçerli olan cümlelerin kümesidir.

Kanıt: 2)'nin 1)'i içerdiği kolayca denetlenebilir. 3) ise 2)'yi dolaysızca içerir; Γ, tüm cümlelerin kümesiyse, çerçeveler sınıfımız boştur. Öyleyse bizi ilgilendirecek tek şey 1)'in 3)'ü içerdiğini göstermek. Γ bir normal kiplik sistemi olmak koşuluyla bir cümleler kümesi, Γ'nın tüm üyelerini barındırıyor ve önermeler dizgesi bakımından tutarlı ise, ve ancak böyleyse, *Γ-tutarlı* olsun. *En çokça Γ-tutarlı* bir kümeyse her cümle için, ya cümlenin kendisini ya da değillemesini barındıran Γ-tutarlı bir kümedir. W, en çokça Γ-tutarlı olan tüm cümle kümeleri sınıfı olsun; Γ, tüm cümlelerin kümesi olmadıkça, W de boş olmayacaktır. W'nin üyeleri olan u ve v için, Ruv, $\Box\phi$ W'de her yer aldığında ϕ de v'de yer alıyorsa, ve ancak böyleyse, doğru olacak şekilde tanımlansın. Yine tanımca, (ϕ bölümsüz olmak koşuluyla) $\phi \in w$ ise, ve ancak böyleyse, $I(\phi, w) = 1$ olsun. Göstermek istediğimiz şu: ϕ gibi her cümle için, $\phi \in w$ ise, ve ancak böyleyse, ϕ, $\langle W, R, I\rangle$ çerçevesinde w dünyasında doğrudur. Bu, bize şunların denk olduğunu gösterecek:

$\phi \in \Gamma$

ϕ, en çokça Γ-tutarlı her kümenin üyesidir

ϕ, W'de yer alan her w dünyasının üyesidir

ϕ, W'de yer alan her w dünyasında doğrudur

ϕ, $\langle W, R, I\rangle$ çerçevesi için geçerlidir

ϕ gibi her cümle için, $\phi \in w$ ise, ve ancak böyleyse, ϕ'nin w'de doğru olduğunun ispatı ϕ'nin karmaşıklığı üzerine uygulanan tümevarımla ilerler. Bu kanıdın bütünüyle güzaf olmayan tek parçası, $\Box\psi$'nin ancak w'nin öğesi olduğunda w'de doğru olduğunun gösterilmesidir. Bunun sağdan sola giden parçasının[7] (yani $\Box\psi$'nin, w'nin öğesiyse w'de doğru olduğunun) ispatı şöyledir: $\Box\psi$, w'nin bir öğesiyse, R'nin tanımı dolayısıyla, ψ, w'den erişilebilen her dünyanın öğesidir. Tümevarım varsayımı dolayısıyla bundan çıkan sonuç ψ'nin, w'den erişilebilen her dünyada doğru olduğu, yani $\Box\psi$'nin, w'de doğru olduğudur.

Öteki parçaya gelirsek: $\Box\psi$, w'nin öğesi olmasın. Görmek istediğimiz, w'den erişilebilen ve içinde ψ'nin doğru olmadığı bir dünya bulunduğu. Tümevarım varsayımına bakıldığında bu demektir ki w'den erişilebilen ve ψ'yi barındırmayan bir dünya aramaktayız. Yani, R'nin tanımı göz önüne getirilirse, $\Box\theta$'nın w'de olmasına uygun her θ cümlesini barındıran ama ψ'yi barındırmayan en çokça Γ-tutarlı bir cümleler kümesi arıyoruz. Bunu elde etmek için, $\Gamma \cup \{\theta\ cümleleri\colon \theta \in w\} \cup \{\sim\psi\}$ birleşiminin totolojik olarak tutarlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Denildiği gibi totolojik olarak tutarlıysa, bu birleşimi şu bilinen yöntemle en çokça Γ-tutarlı bir kümeye genişletebileceğiz: tek tek her cümleyi ele alıp ya cümlenin kendisini ya da değillemesini kümeye ekleyerek her bir aşamada Γ-tutarlılığını korumak. Zorunlulama dolayısıyla, γ, Γ'da yer alıyorsa, $\Box\gamma$ da Γ'da yer alır, öyleyse de $\Box\gamma$, w'de yer alır ve γ, $\{\theta\colon \Box\theta \in w\}$ kümesinde yer alır. Öyleyse $\{\theta\colon \theta \in w\} \cup \{\sim\psi\}$ birleşiminin totolojik olarak tutarlı olduğunu göstermek bize yetecektir. Durum bu değilse, öyle θ_1, θ_2,…,θ_n

[7] Burada, 'sağdan sola' ifadesini kullanırken söz konusu önermenin '↔' eklemiyle yazılmış halini, yani '$\Box\psi, w'de\ doğrudur \leftrightarrow \Box\psi, w'nin\ öğesidir$'i düşünmemiz gerekiyor. Çünkü Türkçe sözdizimi, İngilizce sözdiziminden farklı olarak, karşılıklı koşulluluğun bakışımlı olarak ifade edilmesine el vermiyor, dolayısıyla sağ-sol ayrımı doğal dil yazımında anlamını yitiriyor.

cümleleri vardır ki her bir $\Box\theta_i$ w'de yer alır ve $(\theta_1\to(\theta_2\to\ldots\to(\theta_n\to\psi)\ldots))$ bir totolojidir. Buradan, Totolojik Sonuç ve Zorunlulama yoluyla $\Box(\theta_1\to(\theta_2\to\ldots\to(\theta_n\to\psi)\ldots))$'nin, Γ'nın bir üyesi olduğu çıkar, dolayısıyla Totolojik Sonuç ve (K) Taslağı'nın çoklu uygulamalarıyla şu gösterilir: $(\Box\theta_1\to(\Box\theta_2\to\ldots\to(\Box\theta_n\to\psi)\ldots))$, Γ'da ve o halde w'de yer alır. w, *modus ponens* altında kapalı olduğu için, buradan, kabulümüze karşıt olarak, $\Box\psi$'nin w'de yer aldığı çıkar.

Az önce kurmuş olduğumuz $\langle W, R, I\rangle$ çerçevesine Γ'nın *kural çerçevesi* denir. İncelediğimiz teoremden çıkan ana fikir, bir cümle Γ'nın dışındaysa, kural çerçevesinde bu cümlenin yanlış olduğu bir dünyanın yer aldığıdır. ■

Şimdi birkaç aksiyom taslağı yazalım; farklı kişilerce farklı zamanlarda adlandırıldıkları için bu taslakların adları sinirleri bozacak kadar gelişigüzeldir:

(T) $(\Box\phi \to \phi)$

(4) $(\Box\phi \to \Box\Box\phi)$

(B) $(\theta \to \Box \Diamond \phi)$

(5) $(\Diamond \phi \to \Box \Diamond \phi)$

Ayrıca, ikili bağıntılar için bazı önemli özellikleri de kaydedelim:

R, W'de yer alan her w için Rww ise, ve ancak böyleyse, W üzerinde *yansımalı* bir bağıntıdır.

R, her u, v ve w için Ruv ve Rvw olduğunda Rvw de oluyor ise, ve ancak böyleyse, *geçişlidir*.

R, her u ve r için Ruv olduğunda Rvu da oluyor ise, ve ancak böyleyse, *bakışımlıdır*.

R, her u, v ve w için Ruv ve Ruw olduğunda Rvw de oluyor ise, ve ancak böyleyse, *Öklitçildir*.

K, en küçük normal kiplik sistemi olarak tanımlandığından (yani, öteki normal kiplik sistemlerinin her biri K'yı kapsadığından) bir cümle, (K) Taslağı'nın örneklemelerinden TS ve Zorunlulama kuralları yoluyla türetilebiliyor ise, ve ancak böyleyse, K'nın bir öğesidir. Bir cümle, her çerçevedeki her dünyada doğru ise, ve ancak böyleyse, K'da yer alır. Peki niçin? Çünkü her çerçeve için geçerli olan cümlelerin kümesi bir normal kiplik sistemi olduğundan K'yı barındırır. ϕ, K'da yer almıyorsa, öyle bir çerçeve vardır ki ϕ'nin yanlış olduğu bir dünya bu çerçevede yer alır – anılan çerçeve K'nın kural modelidir.

KT, (T)'yi içeren en küçük normal kiplik sistemi olarak tanımlandığından bir cümle, (K) ve (T)'den TS ve Zorunlulama kuralları yoluyla türetilebiliyor ise, ve ancak böyleyse, KT'nin bir öğesidir. Bir cümle, her yansımalı çerçevedeki her dünyada doğru ise, ve ancak böyleyse, KT'nin bir öğesidir. Niçin? Çünkü: R'nin yansımalı olduğu bir $\langle W, R, I, a\rangle$ modeli için, $\Box\phi$, a'da doğruysa, ϕ, a'dan erişilebilir olan her dünyada doğrudur; daha belirli olarak, ϕ, bizzat a'da doğrudur; öyleyse (T) Taslağı'nın tüm örneklemeleri bu modelde doğru olur. Bu nedenle, her yansımalı çerçeve için geçerli olan cümleler kümesi, (T)'yi kapsayan bir normal kiplik sistemidir. Dahası, KT'nin kural çerçevesi yansımalıdır; kural çerçevesindeki her w dünyası için $\Box\phi$, w'deyse ϕ de w'de olacağından Rww'yi elde ederiz. O halde, ϕ, KT'de yer almıyorsa, öyle bir yansımalı çerçeve vardır ki ϕ'nin yanlış olduğu bir dünya bu çerçevede yer alır – anılan, KT'nin kural çerçevesidir.

K4, (4)'ü içeren en küçük normal kiplik sistemi olarak tanımlanır. Bir cümle, her geçişli çerçevedeki her dünyada doğru ise, ve ancak böyleyse, K4'ün bir öğesidir. Niçin? R'nin geçişli olduğu bir $\langle W, R, I, a\rangle$ modelinde, $\Box\phi$, a'da doğruysa ve w de a'dan erişilebilir ise, w'den erişilebilir olan her dünya a'dan da erişilebilir olacağı ve ϕ, a'dan erişilebilir her dünyada doğru olacağı için, ϕ, w'den erişilebilir her dünyada doğru olacaktır, dolayısıyla $\Box\phi$, w'de doğrudur. $\Box\phi$'nin a'dan erişilebilir her dünyada doğru olacağını göstermiş olduğumuza göre $\Box\Box\phi$ de a'da doğrudur. Böylece (4) taslağının tüm örneklemelerinin bu modelde doğru olduğunu, dolayısıyla, her geçişli modelde doğru olan cümlelerin kümesinin (4)'ü barındıran bir normal kiplik sistemi olacağını görüyoruz. Dahası, K4'ün kural çerçevesi geçişlidir. K4'ün kural çerçevesinde u, v, w dünyaları için Ruv ve Rvw olduğunda $\Box\phi$, u'daysa $\Box\Box\phi$ de u'da yer alır, dolayısıyla $\Box\phi$, v'de ve ϕ de w'de yer alır. Sonuç olarak: Ruw. Böylece, ψ, KT'de yer almıyorsa, KT'nin kural çerçevesi, ϕ'nin yanlış olduğu bir dünyayı içeren geçişli bir çerçeve olacaktır.

KB, (B)'yi içeren en küçük normal kiplik sistemidir. Bir cümle, bakışımlı çerçeveler sınıfı için geçerliyse, ve ancak böyleyse, KB'dedir. K5, (5)'i barındıran en küçük normal kiplik sistemidir. Bir tümce, Öklitçil çerçeveler sınıfı için geçerliyse, ve ancak böyleyse, K5'te yer alır. KT4, ya da Lewis'in verdiği adla 'S4', hem (T)'yi hem de (4)'ü barındıran en küçük normal kiplik sistemidir. Bir cümle, geçişli, yansımalı çerçeveler öbeği için geçerliyse, ve ancak böyleyse, KT4'te yer alır. KTB, hem (T) hem de (B)'yi barındıran en küçük normal kiplik sistemidir. Bir cümle, yansımalı, bakışımlı çerçeveler sınıfı için geçerliyse, ve ancak böyleyse, KTB'de yer alır. KT5, ya da Lewis'in deyişiyle 'S5', hem (T) hem de (5)'i barındıran en küçük normal kiplik sistemidir. Bir cümle, yansımalı, Öklitçil çerçeveler sınıfı için geçerliyse, ve ancak böyleyse, KT5'te yer alır. Yansımalı ve Öklitçil olan ikiyerli bir bağıntı aynı zamanda geçişli ve bakışımlı olacağından, KT5, KT4B5'le aynıdır. Bu yaptığımıza uzunca bir süre devam edebiliriz, ancak ana fikri kavradınız.

Erişilebilirlik bağıntısı bu hikayenin esrarlı parçası. Şimdiye dek, bir mümkün dünyanın bir ötekince erişilebilir olması ya da olmaması gerektiğine ilişkin doyurucu olmaya yaklaşan bir açıklamayla bile karşılaşmadım.[8] Anladığım kadarıyla, erişilebilirlik bağıntısı, çerçeveler ve aksiyom sistemleri arasında tatlı ilişkiler kurmak için *ad hoc* tutunduğumuz bir şey.

[8] Bazen, tarihin, sürekli açılmakta olan dallanmış imkanlar dizisi boyunca çatallı bir yolu izleyerek ilerlediğini düşünürüz, öyle ki şimdi olmakta olan, yarın neyin mümkün olduğunu belirliyordur. Şimdiden bakıldığında, yarın Jamaika'ya uçmam mümkün olabilir, ancak bu gece gerçekleşebilecek yersiz bir olay, yarın Jamaika'ya uçmamı imkansız kılabilir; örneğin, sirkin birinden kaçmış bir kaplan beni yutabilir. Öyleyse, yarın Jamaika'ya uçmam mümkün olsa da, yarın Jamaika'ya uçmamın mümkün olması imkansızlaşabilir, böylece de (5) taslağının bazı örneklemeleri yanlış çıkabilir. Bu fikri formel olarak temsil etmek için, 'mümkün dünya'yı (bekleneceği gibi) eksiksiz bir mümkün tarih akışı olarak değil, eksiksiz bir tarih akışıyla bir zamandan oluşan bir sıralı ikili olarak almamız uygun olacaktır. Bir cümle, t anına dek açıldığı kadarıyla h tarih akışıyla uyumluysa, $< h, t >$'de mümkün olacaktır. Kipliksiz bir cümle, ancak h'de doğruysa $< h, t >$'de doğru olacaktır. t' anı, t'den daha sonra ya da ona eşitse, ve h ile h', dünyanın t anına kadarki tarihini aynı şekilde betimliyorsa, $< h'$, $t'>$ ikilisi $< h, t >$ ikilisince erişilebilir olacaktır. Bu durumda, uygun mantık KT4'tür.