Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi

Γ, Q'yü kapsayan, yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış bir kuram olsun. Gödel'in birinci eksiklik teoreminin ispatı,

(1) $(\sigma \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]))$

cümlesinin bir teorem olmasını sağlayan bir σ cümlesi kurarak ilerliyordu. Buna sahip olunca şunu ispatlamak kolaylaşıyordu:

(2) Γ tutarlı ise, σ, Γ'da ispatlanabilir değildir.

Bu vargıyı, aritmetik dilinde deyimleştirebiliriz. "$\sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sim 0 - 0\urcorner])$"ı kısaltmak için "Con($\Gamma$)"yı kullanarak (2)'yi şöyle formelleştiririz:

(3) $(\mathrm{Con}(\Gamma) \rightarrow \sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]))$.

(1) ve (3) birlikte bize şunu verir:

(4) $(\mathrm{Con}(\Gamma) \rightarrow \sigma)$.

Γ, PA'yı içermek kaydıyla (4)'ün Γ'daki türetimini formelleştirebiliriz. Dolayısıyla şuna sahibiz:

(5) $\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner(\mathrm{Con}(\Gamma) \rightarrow \sigma)\urcorner])$.

Γ'nın teoremlerinin kümesi *modus ponens* altında kapalı olduğu için (5) bize şunu verir:

(6) $(\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\mathrm{Con}(\Gamma)\urcorner] \rightarrow \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]))$.

(3) ve (6) birlikte totolojik olarak şunu içerir:

(7) $(\mathrm{Con}(\Gamma) \rightarrow \sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\mathrm{Con}(\Gamma)\urcorner]))$.

Böylelikle şunu elde ederiz:

> **İkinci Eksiklik Teoremi.** PA'yı içeren tutarlı, yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış hiçbir kuram kendi tutarlılığını ispatlayamaz.

İspat: (5)'in dayanılmaz bir şekilde uzun ve sıkıcı olacak ispatını gerçekten vermek istemiyorum. Bir özetle yetineceğim. İspat, ilk olarak M. H. Löb tarafından belirlenmiş olan üç ilkeye dayanır:

(L1) $\Gamma \vdash \phi$ ise $\Gamma \vdash \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])$.

(L2) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])\urcorner]))$.

(L3) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner]) \rightarrow (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\psi\urcorner]))))$.

(L1)'i daha önce, "$\mathrm{Bew}_\Gamma(x)$"in, $\{\ulcorner\phi\urcorner$: ϕ, Γ'nın bir sonucudur$\}$'u, Q'da zayıf olarak temsil ettiğini gösterdiğimizde ispatlamıştık. Bu bize şunu anlatır: $\Gamma \vdash \phi$ ise $Q \vdash \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])$ ve dahası Γ, Q'yü kapsadığı için $\Gamma \vdash \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])$.

(L2), (L1)'in formelleştirilmiş ifadesidir. Bunu ispatlamak için, her doğru Σ tümcesinin, Γ'da ispatlanır olduğuna dair ispatımızı formelleştiririz. Önce, terimlerin karmaşıklığı üzerine yapılan tümevarım yoluyla her $\tau(x_1,...,x_n)$ terimi için

$$\Gamma \vdash (\forall z_1)...(\forall z_n)(\forall z_{n+1})(\tau(z_1,...,z_n) = z_{n+1} \rightarrow$$

$$\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\tau(x_1,...,x_n) = x_{n+1}\urcorner x_1/[z_1]...x_n/[z_n]x_{n+1}/[z_{n+1}]]))$$ olduğunu gösteririz.

Sonra, bağlı tamdeyimlerin karmaşıklığı üzerine tümevarım yoluyla her bir $\psi(x_1,...,x_n)$ bağlı tamdeyimi için

$\Gamma \vdash (\forall z_1)...(\forall z_n)(\psi(z_1,...,z_n) \rightarrow Bew_\Gamma([\ulcorner\psi(x_1,...,x_n)\urcorner x_1/[z_1]...x_n/[z_n]]))$ olduğunu gösteririz. Sonra da önden eklenmiş ilk varlık niceleyicisinin uzunluğu üzerine yapılan tümevarım yoluyla bir Σ tamdeyimi olan ψ için aynısını ispatlarız. İhtiyacımız olan anahtar unsur, ispat kurallarımızın Varlık Genellemesini içerdiğidir. $Bew_\Gamma(x_1)$ bir Σ formülü olduğu için bu ilkenin özellenmiş hali şu olacaktır:

$$\Gamma \vdash (\forall z_1)(Bew_\Gamma(z_1) \rightarrow Bew_\Gamma([\ulcorner Bew_\Gamma(x_1)\urcorner x_1/[z_1]])).$$

Bunu $[\ulcorner\phi\urcorner]$ ile örnekleyerek (L2)'yi elde ederiz. Ayrıntılı bir ispat oldukça zahmetli olacaktır.

(L3)'ü ispatlamak için tek yapmanız gerekenin şu olduğunu bilelim: $(\phi \rightarrow \psi)$ ve ϕ'nin ispatlarına sahipsek, bu iki ispatı birlikte alıp Modus Ponens kuralı vasıtasıyla sonunda ψ'yi ekleyerek ψ'nin bir ispatını elde edebiliriz. Bütün bilmemiz gereken, aritmetik bitiştirme işleminin düzgün çalıştığıdır.

Hazır (L1)-(L3)'e sahipken, İkinci Eksiklik Teoremini elde etmek için bunlardan nasıl faydalanacağımızı görmek istiyoruz. Kendine Gönderim Lemması bize öyle bir σ tümcesi verir ki

(a) $\Gamma \vdash (\sigma \leftrightarrow \sim Bew_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]))$.

Şuna sahibiz,

(b) $\Gamma \vdash (\sigma \rightarrow \sim Bew_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]))$.

(L3) şunu türetmemize izin verir:

(c) $\Gamma \vdash Bew_\Gamma([\ulcorner(\sigma \rightarrow \sim Bew_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]))\urcorner])$.

(L3)'ü uygulayarak şunu elde ederiz:

(d) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]) \rightarrow \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner])\urcorner]))$.

(L2) bize şunu verir:

(e) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]) \rightarrow \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner])\urcorner]))$.

$(\sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]) \rightarrow (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]) \rightarrow \sim 0 = 0))$ bir totoloji, dolayısıyla da Γ'nın bir teoremi olduğundan, (L1) vasıtasıyla şuna sahip oluruz:

(f) $\Gamma \vdash \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner(\sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]) \rightarrow (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]) \rightarrow \sim 0 = 0))\urcorner])$.

(L3)'ün iki kez uygulanışı bize şunu verir:

(g) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner])\urcorner]) \rightarrow (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner])\urcorner]) \rightarrow$

$\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sim 0 = 0\urcorner])))$.

(d), (e) ve (g), doğruluk-fonksiyonlu eklemler vasıtasıyla şunu sağlar:

(h) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]) \rightarrow \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sim 0 = 0\urcorner]))$.

"Con" tanımını da kullanılırsa

(i) $\Gamma \vdash (\mathrm{Con}(\Gamma) \rightarrow \sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\sigma\urcorner]))$.

Bu ve (a) bize şunu verir:

(j) $\Gamma \vdash (\mathrm{Con}(\Gamma) \rightarrow \sigma)$.

Γ tutarlı ise, Con(Γ)'nın, Γ'da ispat edilebilir olmadığını göstermek istiyoruz. Buna denk olarak, Con(Γ)'nın, Γ'da ispat edilebilir olduğu durumda Γ'nın tutarsız olduğunu da göstermek istiyoruz. Bunu elde etmek için şunu kabul edelim:

(k) $\Gamma \vdash \mathrm{Con}(\Gamma)$.

(j) ve (k) şunu sağlar:

(l) $\Gamma \vdash \sigma$.

(L1) vasıtasıyla şunu elde ederiz:

(m) $\Gamma \vdash \mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner\sigma\urcorner])$.

(a) ve (m) bize şunu verir:

(n) $\Gamma \vdash \neg\sigma$.

(l) ve (n) bize, istenildiği üzere, Γ'nın tutarsızlığını gösterir.⊠

Birinci Eksiklik Teoremi biraz hayal kırıklığına uğratıcıydı. Kuşkusuz, yaptığı söylenen şeyi gerçekten yaptı; yani bize doğru, ispatlanamaz bir cümle verdi. Fakat bize verdiği cümle, Birinci Eksiklik Teoremi'ndeki tezahürü dışında, hiç kimsenin asla ilgi duymayacak olduğu garip bir ifadeydi. Teorem, PA'da ispatlanabilir olmayan ilgi çekici hiçbir önerme bulunmaması ihtimaline kapıyı açık bırakıyordu.

İkinci Eksiklik Teoremi sayesinde hayal kırıklığımız yok olur, çünkü kuramlarımızın tutarlı olup olmadıklarını bilmek kesinlikle ilgimiz dahilindedir. Böylece Con(PA), PA'da ispatlanabilir olmayan önemli bir doğruluktur.

İkinci Eksiklik Teoremini aritmetik dili için ispatlamıştık, ama aynı ispat, aritmetik dilini çevirebileceğimiz her dil için çalışacaktır. Özellikle, aksiyomlu kümeler kuramının, tutarlı olduğunda, kendi tutarlılığını ispatlayamaz olduğunu ispatlayabiliriz. Bu keşif, Hilbert'in programını aniden durdurmuştur. Hilbert, kümeler kuramının aksiyomlarının tutarlılığını, aksiyomlu kümeler kuramından çok daha zayıf bir sistem içinde ispatlamayı umuyordu. Aksiyomlu kümeler kuramının tutarlı olduğu kabul edilecek olursa, bu kuramın tutarlılığını ispatlamak için daha güçlü bir kuram gerekecek gibi görünmektedir. Dolayısıyla, kümeler kuramının tutarlılığı hakkında bir endişe varsa, işe yarar bir tutarlılık ispatı elde edilemeyecektir.

Yorumlamaları kullanarak, İkinci Eksiklik Teoremi'nin ispatını, Zermelo-Fraenkel küme kuramı aksiyomları gibi kuramlara doğru, yani PA'dan anlamlı bir biçimde daha zengin olan kuramlara doğru uzatabiliriz. Yine aynı tekniği kullanarak, PA'dan anlamlı bir biçimde daha zayıf olan Q gibi kuramlara doğru ispatımızı uzatabiliriz. Q için İkinci Eksiklik Teoremini, "Bew_{PA}" yerine "Bew_{Q}" koyarak (L1)-(L3)'ün mukabillerini ispatlamak suretiyle doğrudan ispatlayamayız. (L2)'yi ispatlamak için tümevarıma ihtiyacımız vardır ve Q'da tümevarıma sahip değiliz. Q için ve Q'yu kapsayan diğer kuramlar için İkinci Eksiklik Teoremini elde etmek, çok daha dolambaçlı bir yol izlemeyi gerekli kılar. Öncelikle, PA'dan daha zayıf olmakla birlikte İkinci Eksiklik Teoremi'nin ispatlanmasına el verecek kadar güçlü bir Γ kuramı üretiriz – Γ'yı, tümevarım aksiyom taslağını sınırlandırmak suretiyle PA'dan elde ederiz. Sonra, Γ'yı Q'da yorumlamak için, mantıki olmayan terimlere dokunmayan, ama niceleyicileri uygun bir şekilde sınırlandıran bir çeviri yaparız. Q'da CON(Q)'nun bir ispatına sahip olsaydık, Γ'da CON(Γ)'nın ispatını elde edebilirdik. Esas olarak Alex Wilkie'ye ait olan ispat, ayrıntılarında titizdir ve burada bütün yapabileceğim ispatın tamamını yazılmış olarak bulabileceğiniz Sam Buss'un web sitesinin adresini vermektir; http://www.math.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb/handbookII/index.html.

Dikkatimizi yeniden PA'ya verecek olursak, bir θ cümlesinin doğru olduğunu düşündüğümüzde onun tutarlı olduğunu da düşüneceğiz; yani, şuna sahip olmayı bekleyeceğiz:

$$(\gamma \rightarrow \mathrm{Con}(\{\gamma\})).$$

Bu taslağın bütün örneklemeleri gerçekten de PA'da ispatlanabilirdir. Bunun kolay olmayan ispatına burada girişmeyeceğim. Şimdi bundan çıkan sonuç şudur: Γ kuramı, sonluca aksiyomlulaştırılmış ise, kendi tutarlılığını ispatlar. Bu nedenle, İkinci Eksiklik Teoremi'ne göre Γ, sonluca aksiyomlulaştırılmış ise ve PA'yı kapsıyorsa, tutarsızdır. Dolayısıyla şunu elde ederiz:

> **Teorem** (Ryll-Nardzewski). Aritmetik dilinde PA'yı kapsayan hiçbir tutarlı kuram sonluca aksiyomlulaştırılamaz.

Bu teorem, aritmetik dilinden kalkıp aritmetik dilini çevirebildiğimiz diğer dillere genelleme yapan ve çalışmamıza konu olan vargıların birçoğu kadar esnek değildir. Ryll-Nardzewski teoremi ve onu destekleyen ($\gamma \rightarrow \mathrm{Con}(\{\gamma\})$) taslağı kırılgandır. Bunlar aritmetik dili için geçerlidir, ama aritmetik dilini kapsayan diğer diller için zorunlu olarak geçerli değildir.

Üzerine düşündükten sonra, Γ gibi bir aritmetik kuramının tüm üyelerinin doğru olduğunu onaylamaya istekli olduğumuz durumda, bu kuramı *bilinçli olarak kabul ediyor* olalım – bunun biraz garip olduğu biliyorum, ama bir süre sabırlı olalım. (Tarski'den öğrendiğimizi aklımızda tutalım: doğruluk *simpliciter* felsefi olarak kuşkulu olmakla birlikte, *aritmetik dilinde doğruluk* kavramı sakıncasızdır.) Γ'nın bütün üyelerinin doğru olduğunu düşünüyorsak, kuşkusuz Γ'nın tutarlı olduğunu da düşünmemiz gerekir, çünkü bize tutarsız bir cümleler kümesinin tüm üyelerinin doğru olamayacağını söyleyen Sağlamlık Teoremi'ni biliyoruz. Buradan hareketle Γ, PA'yı kapsayan, yinelemeyle aksiyomlulaştırılmış bir cümleler kümesiyse, Γ'yı bilinçli olarak kabul ettiğimiz durumda $\mathrm{Con}(\Gamma)$'yı da kabul edeceğiz.

Γ, üzerine dikkatlice düşündüğümüzde, kabul etmeye istekli olduğumuz aritmetik cümlelerin kümesi olsun. Lucas ve Penrose'un izniyle, Γ'nın etkin olarak sayılabilir olduğunu farz edersek, Γ'yı bilinçli olarak kabul ettiğimiz durumda $\mathrm{Con}(\Gamma)$'yı da kabul edeceğiz ki bu da İkinci Eksiklik Teoremi'ne göre Γ'nın tutarsız olduğu anlamına gelir. Bu, kendimizi bilme yetimize bir sınırlama getirir. Kabul ettiğimiz aritmetik cümleler kümesinin tutarlı olduğunu farz ettiğimizde, kabul ettiğimiz aritmetik cümleler kümesini *bilinçli olarak* kabul edemeyiz. Muhtemelen kabul ettiğimiz aritmetik cümleler kümesinin her sonlu altkümesini bilinçli olarak kabul ederiz, ama bütünü bilinçli olarak kabul etmeyeceğiz.

Bu birkaç şekilde meydana gelebilir. En olası durum, kabul ettiğimiz aritmetik cümleler kümesini tanımlayabilmek için kendi zihin durumumuzun yeterince farkında olmayışımızdır. Bu, bana öyle geliyor ki, insanlar için normal koşuldur.

Yine de, fütüristik bir tür beyin taramasının güya beynimizin sinir ağı diyagramını keşfetmek suretiyle bize tam olarak hangi cümleleri kabul ettiğimizi gösterdiği bilim kurgu durumları tasarlayabiliriz. *Enterprise* uzay gemisinin bütün tıbbi imkanları elimizin altında olsa bile, durumu, belirli bir anda, o anda kabul etmeye istekli olduğumuz aritmetik cümleler kümesinin Gödel kodunu[1] bilecek şeklinde ayarlamamız çok da kolay değildir. Mesele şudur ki aritmetik inançlarımız bütünüyle *a priori* düşünüşümüzün ürünleri değildir. Aritmetik inançlarımızın bazıları geçmiş duyu deneyimlerimizden—örneğin dinlenilen bir dersten ya da okunan bir kitaptan—kaynaklanır ve yeni duyu deneyimleriyle inançlarımızın gelecekte değişeceğini bekleyebiliriz. Daha özelde, beynin t_0 zamanında alınan anlık görüntüsünün bilgisayardaki çözümlemesi, bana, kabul ettiğim aritmetik cümleler kümesinin k Gödel koduna sahip olduğunu söylüyorsa, k Gödel kodlu cümleler kümesinin tutarlı olduğunu kabul ederek bu bilgiye karşılık verebilirim. Ama bu, kendi tutarlılığını belirten bir cümleler kümesine inandığım anlamına gelmeyecektir. Bunun yerine, izleyen t_1 zamanında, bilgisayar

---

1 Yinelemeli olarak sayılabilir bir kümenin Gödel kodunun, bu kümenin kaplamı olduğu Σ tamdeyiminin Gödel sayısı olduğunu söyleriz.

çıktısını gördükten sonraki aritmetik inançlarımın kümesi, önceki t_0 zamanında inandığım cümleler kümesinin tutarlı olduğu önermesini kapsar. Şeyleri, belirlenen bir zamanda, o zamanda kabul etmeye istekli olduğumuz aritmetik cümlelerin kümesinin koduna sahip olacağımız şekilde ayarlayabilmek için daha dolambaçlı bir yol izlememiz gerekir.

Beyninizin eksiksiz bir devre çözümlemesinin size söylemesi gereken yalnızca kabul ettiğiniz cümleler değildir; nasıl ki bir toplama makinesinin eksiksiz bir devre çözümlemesi size, makinenin, farklı mümkün tuş vuruşları kombinasyonlarına nasıl yanıt vereceğini söyleyecekse, bu çözümleme de, gelecekte alabileceğiniz farklı duyu girdilerine yanıt olarak kabul edecek olduğunuz cümleleri de söylemelidir. Bu, size f gibi bir fonksiyon için ayrıntılı bir betimleme sağlayacaktır, öyle ki herhangi bir mümkün i duyu girdisi için f(i), i'yi deneyimledikten sonra kabul edeceğiniz aritmetiksel cümleler kümesinin Gödel kodudur. Sözedilen f fonksiyonu, *geçiş fonksiyonu*nuz olsun.[2]

Yeni duyu girdilerinin zihin durumlarınızı nasıl etkileyeceğini tahmin etmek mümkün değildir. Belki, bir alaycı kuşun şarkısı, beyninizin önceden pineklemekte olan bir köşesini uyandıracak ve öteki türlü elde edilmesi imkansız matematiksel bir kayrayışın tadını çıkarmanıza imkan tanıyacaktır. Zihnin saat düzeneği modeli doğruysa, yeterli çaba, beceriklilik ve teknik kudret sayesinde, kabul etmeye istekli olduğunuz aritmetik cümleler kümesinin Gödel kodunu bilir hale gelmeniz kuram düzeyinde mümkündür. Bu amaçla, alaycı kuş sesleri gibi dikkat dağıtan deneyimlerin etkilerini en aza indirmeye çalışalım ve genel anlamda, zihin durumunuzu öğrenmenin zihin durumunuzu değiştireceği gerçeğiyle nasıl başa çıkacağınız sorusuna odaklanalım. Öyleyse farz edelim ki, duyulardan mahrum bırakıldığınız bir odaya yerleştirildiniz ve LED ekranda görünecek bir Arap rakamından başka duyularınızı

---

2 İyice basitleştirmek için, beyninizin belirlenimci olduğunu varsayıyorum. Bu, bildiğim kadarıyla, gerçek hayatta henüz kesinleşmiş değil.

uyaracak bir şey yok. k sayısını, k'ya karşılık gelen rakamın LED ekranda göründüğü durum için bir kod gibi kullanarak, geçiş fonksiyonunuzun rakam girdileri aldığını düşünebiliriz. Odaya girdiğinizde beyninizin anlık bir görüntüsü alınır ve geçiş fonksiyonunuzun Gödel kodunu belirleyen bir bilgisayara aktarılır. Sonra bu koda karşılık gelen Arap rakamı LED ekranda yansıtılır. Diyelim ki sayı k'dir. Bu durumda, ekranı gördükten sonra kabul etmeye istekli olduğunuz aritmetik cümlelerin kümesinin Gödel sayısını bileceksiniz. Bu, k girdisi üzerine k Gödel kodlu fonksiyonun—buna “f” diyelim—çıktısıdır. Böylece kendi Gödel sayınızı bileceksiniz.

Sırf f(k) tarafından kodlanmış kümenin bütün üyelerini kabul etmeye istekli olduğunuzu bildiğiniz için, bu kümenin bütün üyelerinin doğru olduğunu da kabul etmeye istekli olmalı mısınız? Kümedeki her bir cümleyi kabul etmek için, dolayısıyla da cümlenin doğru olduğunu kabul etmek için yeterli sebebiniz var. Fakat bu, kümedeki bütün cümlelerin doğru olduğunu kabul etmek için bir sebebiniz olduğunu göstermez, çünkü bazen kendimizi öyle bir durumda buluruz ki, bir genellemenin her bir örneklemesini kabul ederken genellemenin kendisini kabul etmeyiz. f(k)'nın bütün üyelerinin doğru olduğu iddiasını kabul eder bir durumdaysanız, bunu kabul etmenize yol açan delil matematiksel değil psikolojik olacaktır. LED'i gözlemlemek, size yeni herhangi bir matematiksel kavrayış kazandırmış değildir. Kullanılan araçlara güvendiğiniz göz önünde tutulursa, bu gözlem size psikolojik durumlarınız hakkında bir şey söylemekle kalır. Soru şudur: f(k)'nın bütün çıktılarını kabul etmeye istekli olduğunuz şeklindeki psikolojik gerçeği biliyor olmanız, f(k)'nın bütün çıktılarının doğru olduğunu kabul etmeniz için iyi bir sebep midir?

Şöyle akıl yürüttüğünüzü tasarlayabiliyorum: “Biliyorum ki dikkatli, usul bilir ve zekiyim ve iyi bir sebep olmaksızın hiçbir şeyi kabul etmem. Matematiksel hatalar yapan biri değilim. Öyleyse kabul etmeye istekli olduğum şeylerin doğru olduğundan da emin olabilirim.” Umarım bu şekilde akıl yürütmüyorsunuzdur, çünkü bu bana son derece kibirli geliyor. Ve zaten bu kibir derhal cezalandırılacaktır. Kabul etmeye istekli olduğunuz şeylerin doğru olduğunu kabul ediyorsanız, kabul etmeye istekli olduğunuz şeylerin tutarlı olduğunu da kabul etmeye istekli olacaksınızdır, ve bu, İkinci Eksiklik Teoremi'ne göre kabul etmeye istekli olduğunuz şeylerin tutarsız olduğu anlamına gelecektir.

“Kabul etmeye istekli”nin muğlâk bir tabir olduğu gerçeğinden faydalanarak daha yüksek kabul standartları benimsemek suretiyle kibirlilik ithamının üstesinden gelmeye çalışabilirsiniz. “Çoğu zaman,” diye kabul edebilirsiniz, “benden bir sonraki kişi kadar hata yapmaya açığım. Fakat an itibarıyla, bir aritmetik ifadeyi ‘kabul etmek’ten bahsettiğimde bu ifadeyi, titiz matematiksel kesinliğin en yüksek standartları altında benimsemeye istekli olduğumu kastediyorum. Burada ‘kabul etmek’ tabirini böyle anlıyorum ve geçiş-fonksiyonu-tanıma programını, bu yüksek kesinlik standardını yansıtacak şekilde programlamıştım. Kuşkusuz, böylesine yükseltilmiş epistemik kıstaslarım varsa, kabul etmeye istekli olduğum şeylerin doğru olduğundan emin olabilirim.” İşin kötüsü, bu çok yüksek standartları benimsemek, kabul etmeye istekli olduğunuz şeylerin doğru olduğuna inanmayı gerçekten de daha makul kıldığı halde, kendi doğruculuğunuza olan inancınız, her ne kadar akla uygun olsa da, o çok yüksek standartlarınızı karşılayacak kadar güvenli değildir. Standartları yükseltmek, kabul ettiğiniz şeylerin doğru da olduğu inancınız da dahil olmak üzere, inançlarınızın “kabul edilir” sayılmasını daha zorlaştırır.

Sonuçta Lucas-Penrose çıkarımından alınacak ders kanımca bir tevazu dersidir. Biz insanlar, oldukça yanılabilir varlıklarız ve dikkatlice akıl yürütüyor olduğumuzda bile kabul ettiğimiz şeylerin doğru olduğundan, hatta tutarlı olduğundan bile emin olamayız.

Dikkatimizi, Γ kuramımızı, Peano aritmetiğinde olduğu gibi, bilinçli olarak kabul ettiğimiz duruma çevirelim. Bu, yalnızca Γ'nın üyelerinin tutarlı olduğunu varsaymakla kalmayıp onların doğru olduğuna da inandığımız anlamına gelir. Elbette, Γ'nın üyelerinin doğru olduğu iddiası, Γ'nın tutarlı olduğu iddiasının aksine, aritmetik dilinde gösterebildiğimiz bir şey değildir. Fakat, Γ'nın doğru olduğu inancımızın, kabul etmeye istekli olduğumuz saf aritmetik cümleler üzerinde bir takım yansımaları olacaktır. Verili bir ϕ aritmetik cümlesi için ϕ'nin doğru olup olmadığını bilebilir veya bilemeyebiliriz, ama Γ'nın bütün üyelerini doğru saydığımız ve doğru bir kuramın bütün sonuçlarını doğru kabul ettiğimiz için ϕ'nin, Γ'nın bir sonucu olduğunda doğru da olduğunu bileceğiz. Yani, Yansıtma Aksiyomları olarak bilinen şeylerin tamamını kabul etmeye istekliyiz:

$$(\mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow \phi).$$

Bunlar "Yansıtma Aksiyomları"dır çünkü onları doğrudan Γ'dan değil, Γ'nın doğru olarak kabul etmeye istekli olduğumuz bir kuram olduğu gerçeği üzerine *yansıtma yaparak* (yani, bir kez daha düşünerek) elde ederiz.

Yansıtma Aksiyomları, bilinçli olarak Γ'yı kabul etmeye istekli olduğumuz için kabul etmeye istekli olduğumuz önermelerdir. Hangileri gerçekten Γ'nın sonuçlarıdır? Elbette, ϕ, Γ'nın bir sonucu ise $(\mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow \phi)$ koşullusu da Γ'nın bir sonucudur, çünkü ardılını (yani, koşulu) ispatlayarak bir koşulluyu ispatlayabilirsiniz. Yansıtma Aksiyomları arasından yalnızca bunların Γ'da ispatlanabilir olduğu ortaya çıkar:

> **Löb Teoremi.** Γ, PA'yı kapsayan, yinelemeli bir cümleler kümesi olmak kaydıyla, ancak ϕ Γ'nın bir sonucu ise, $(\mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow \phi)$ Yansıtma Aksiyomu Γ'nın bir sonucudur.

İkinci Eksiklik Teoremi'ni, ϕ'yi " $\sim 0 = 0$"a eşit alarak Löb Teoremi'nin özellemesi olarak türetebiliriz. Diğer taraftan, Löb Teoremi'ni İkinci Eksiklik Teoremi'nden türetebiliriz. Löb, teoremi ilk olarak böyle ispatlamamıştır; bu, Saul Kripke'ye ait olan sonraki bir ispattır.

İspat (Kripke): Kullandığımız kilit olgu şudur: herhangi bir ψ ve θ için, $\mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner(\psi \rightarrow \theta)\urcorner])$, ispatlanabilirlik bakımından $\mathrm{Bew}_{\Gamma\cup\{\psi\}}([\ulcorner\theta\urcorner])$'ya eşittir. Bunu görmek kolaydır. Elimizde $(\psi \rightarrow$

θ)'nın Γ'dan türetimi varsa, θ'nın, $\Gamma \cup \{\psi\}$'den üretimini, Öncül Tanıtımı yoluyla ψ'yi bir satır olarak eklemek, sonra da *Modus Ponens* yoluyla θ'yı eklemek yoluyla elde edebiliriz. Bunun tersi olarak, elimizde θ'nın, $\Gamma \cup \{\psi\}$'den ispatı varsa, Koşullu İspat yoluyla ($\psi \rightarrow \theta$)'nın Γ'dan türetimini elde ederiz.

Löb Teoremi'nin ispatını, tamdevriğini ispatlayarak verebiliriz, yani, ϕ'nin Γ'nın bir sonucu olmadığını varsayarak ve ($\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow \phi$)'nin, Γ'nın bir sonucu olmadığı vargısını türeterek. ϕ, Γ'nın bir sonucu olmadığı için $\Gamma \cup \{\sim \phi\}$ tutarlıdır. İkinci Eksiklik Teoremi'nden de anlaşıldığı gibi $\Gamma \cup \{\sim \phi\}$, kendi tutarlılığını ispatlamaz, öyleyse şunu elde ederiz:

$$\Gamma \cup \{\sim \phi\} \nvdash \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\sim \phi\}).$$

$$\Gamma \cup \{\sim \phi\} \nvdash \sim \mathrm{Bew}_{\Gamma\cup\{\sim\phi\}}([\ulcorner\sim 0 = 0\urcorner]).$$

$$\Gamma \cup \{\sim \phi\} \nvdash \sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner(\sim \phi \rightarrow \sim 0 = 0)\urcorner]).$$

$$\Gamma \cup \{\sim \phi\} \nvdash \sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])$$

(çünkü ($\sim \phi \rightarrow \sim 0 = 0$) ve ϕ ispat kuramı bakımından denktir).

$$\Gamma \nvdash (\sim \phi \rightarrow \sim \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])).$$

$$\Gamma \nvdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow \phi).\boxtimes$$

Löb Teoremi şöyle ortaya çıkmıştı: Gödel, kendi kendinin PA'da ispatlanamaz olduğunu öne süren bir cümle oluşturdu ve bu cümlenin PA'da doğru fakat ispatlanamaz olduğunu gösterdi. Leon Henkin, bunun yerine, kendi kendinin PA'da ispatlanabilir olduğunu öne süren bir cümle oluştursaydık ne olacak olduğunu merak ediyordu. Böylesi bir cümle ispatlanabilir olacak mıydı? Doğru olacak mıydı? Löb, Henkin'in sorusunu cevaplamak için,

ϕ'nin, kendi kendinin PA'da ispatlanabilir olduğunu öne süren bir cümle olduğu, dolayısıyla şunun sağlandığı durumda

$$\text{PA} \vdash (\phi \leftrightarrow \text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])),$$

ϕ'nin, PA'da ispatlanabilir (ve böylece de doğru) olduğunu gösterdi. Löb, makalesini *Journal of Symbolic Logic*'e gönderdi, ki makale oradan da hakemlik yapması için Henkin'e gönderildi. Henkin, Löb'ün ispatında, varsayımın sadece tek yönünü kullandığını fark etti. Böylece Löb Teoremi, bugün sahip olduğumuz haliyle doğmuş oldu. İşte Löb'ün ispatı:

İspat (Löb): ϕ verildiğinde Kendine Gönderim Lemması'nı kullanarak öyle bir δ tümcesi oluşturalım ki:

(i) $\Gamma \vdash (\delta \leftrightarrow (\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner]) \rightarrow \phi)).$

(i), önermeler dizgesi kuralları yoluyla şunu doğurur:

(ii) $\Gamma \vdash (\delta \rightarrow (\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner]) \rightarrow \phi)).$

(L1) bize şunu verir:

(iii) $\Gamma \vdash \text{Bew}_\Gamma([\ulcorner(\delta \rightarrow (\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner]) \rightarrow \phi))\urcorner]).$

(L3)'ün iki kez uygulanışı bize şunu verir:

(iv) $\Gamma \vdash (\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner]) \rightarrow (\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner])\urcorner]) \rightarrow \text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner]))).$

(L2) şunu doğurur:

(v) $\Gamma \vdash (\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner]) \rightarrow \text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\text{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner])\urcorner])).$

Şöyle bir doğruluk-fonksiyonlu bir çıkarım yoluyla

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

$(\alpha \rightarrow \beta)$

$\therefore (\alpha \rightarrow \gamma)$

şunu türetiriz:

(vi) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner]) \rightarrow \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner]))$.

Löb Teoremi'nin varsayımı olarak şunu kabul edelim:

(vii) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner]) \rightarrow \phi)$.

(vi) ve (vii) bize şunu verir:

(viii) $\Gamma \vdash (\mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner]) \rightarrow \phi)$

(i) ve (vii) bize şunu verir:

(ix) $\Gamma \vdash \delta$.

(L1)'i kullanarak şunu türetiriz:

(x) $\Gamma \vdash \mathrm{Bew}_\Gamma([\ulcorner\delta\urcorner])$.

(viii) ve (x) bize istenildiği üzere şunu verir:

(xi) $\Gamma \vdash \phi$.⊠