Tarski'nin Doğruluk Kuramı

1920'ler ve 1930'ların ilk yılları boyunca, bilim odaklı düşünen felsefeciler (özellikle Viyana Çevresi'nin pozitivistleri) doğruluk kavramına kayda değer bir şüpheyle bakıyorlardı; bu şüphenin altında yatan yalnızca yalancı paradoksu değil, aynı zamanda dünya ile dil arasında yer alan, doğru cümlelerin doğru olmasını sağlayan o kısmen esrarlı ilişkinin, deneyci bakışa sahip felsefecilerin engellemek istediği türden bir şey olmasıydı. Alfred Tarski[1] doğruluk kavramının, bilim bakımından güvenilirliği tartışma götürmez başka kavramlar bakımından tanımlanabileceğini göstererek bu kaygıları gidermeye çalıştı. Bunu biraz daha inceltelim: Tarski'nin yaptığı genel bir doğruluk kuramı tanımlamak değil, geniş bir $\mathcal{L}$ dilleri kümesi için, $\mathcal{L}$ cümlelerine uygulanabilecek olan bir doğruluk kavramının bizzat $\mathcal{L}$ içerisinde nasıl tanımlanabileceğini göstermekti. Söz konusu dillerin hepsi formelleştirilmiş dillerdi. İleride göreceğiz ki, aynı yöntemler doğal dillere uygulanabilecek bir doğruluk kavramının tanımlanması için kullanılamaz. Biz burada Tarski'nin yöntemlerini, aritmetik dilinde doğruluğu tanımlayarak örnekleyeceğiz.

Daha başlarken bir bilmeceyle karşılaşıyoruz. Doğruluk kavramına ilişkin mevcut anlayışımız yeterince açık ve kesin olmadığı için, bu kavramı halihazırda tam olarak anlıyor olduğumuz terimler üzerinden tanımlayarak açıklaştırmak istiyoruz. Ancak doğruluk kavramını halihazırda tam olarak anlamıyorsak, önerilen tanımın gerçekten başarılı olduğunu nasıl bileceğiz? Doğruluk için uygun bir tanım arıyoruz, ancak doğruluk kavramını halihazırda anlıyor değilsek uygun bir tanım yakaladığımızda bundan nasıl haberdar olacağız?

'Bir kısmi fonksiyon, hangi durumlarda bir algoritmayla hesaplanabilirdir?' sorusunu yanıtlamaya çalışırken de benzer bir sorunla karşılaştık. Halihazırda kesin bir hesaplanabilirlik kıstasımız yok – ve aradığımız şey de zaten bu – ancak kavramın kendisine ilişkin sezgilerimiz bize çok sayıda açık örnek sunacak kadar keskin. Ne var ki elimizdeki örnekler hep tek yanlı: evet, hesaplanabilir olduğunu bildiğimiz bir sürü örnek fonksiyon var; yine hesaplanabilir olduğunu bilmediğimiz örnek fonksiyonlar var, ancak hesaplanabilir *olmadığını* bildiğimiz fonksiyonlar için elimizde bir örnek bulunmuyor. (Halting Problemi – yani, verili bir algoritmanın verili bir girdi için bir çıktı verip vermeyeceğini belirleme problemi – algoritmayla çözülebilir olmayan problemlere bir örnektir, ancak Halting Problemi diye bildiğimiz şey, aslında, ancak kesin bir hesaplanabilirlik tanımımız olduğunda kesinleştirebileceğimiz bir problemin kısaltılmış halinden ibarettir.) Hesaplanabilir kısmi fonksiyonların tam da Σ kısmi fonksiyonları olduğu yönündeki önerilen yanıt şu koşulları sağlıyordu:

Bilindik yöntemlerle hesaplanabilir olan her kısmi fonksiyon önerilen kıstası sağlar.

Bu kıstası sağlayan her kısmi fonksiyon bilindik yöntemlerle hesaplanabilirdir.

Burada, önerilen kıstası sağlamayan herhangi bir fonksiyonu hesaplayacak olan, am şimdiye dek düşünülmemiş olan bazı teknikler keşfedilmesi imkanı açık bırakılır. Böyle bir şey olmayacağı

[1] 'Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen', *Studia Logica* 1: 261-405. İngilizce çevirisi J. H. Woodger tarafından şu metinde verilmiştir: Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, 2. Baskı (Indianapolis: Hackett, 1983), s. 152-278.

konusunda bize güven verecek yeterli sayıda bulgu toplanabilir, ancak bulgu, ispat gibi iş görecek bir şey değildir.

Peki doğruluğu tanımlamaya geldiğimizde durum nedir? Doğru olduğu bilinen birçok cümle vardır, öyle ki önerilecek her tanım örneğin Fermat'nın Son Teoremi'ni 'doğru' yükleminin kaplamına almak zorunda kalacaktır. Yine, bu kaplamın dışında kaldığı bilinen başka cümleler vardır; bir örnek vermek gerekirse, Fermat Teoremi'nin değillemesini düşünebiliriz. Ayrıca, cümle olmayan herşeyin bu kaplamın dışında kaldığını bilmekteyiz. Ancak söz konusu ayrımın hangi yakasına düşmesi gerektiğini bilemediğimiz yine birçok cümle bulunur. Örneğin, kimse şu an Goldbach Tahmini'nin, 'doğru' yükleminin kaplamı içinde mi yoksa dışında mı kalması gerektiğini bilmiyor. 'Doğru' için verilecek doyurucu bir tanım, mevcut bilgimizi aşan bu gibi her örnek için uygun yargıyı vermelidir, ancak aritmetikte alim-i mutlak olmadığımıza göre, böyle bir yargının uygun olup olmadığını nasıl bileceğiz?

Önerilen doğruluk tanımının doyurucu olup olmadığını bilebilmek için halihazırda hangi cümlelerin doğru olduğunu bilmemiz gerekmez. Aksine, her bir cümle için, o cümlenin doğru olduğu koşulları belirleyebilecek olmamız yeterlidir. Öyleyse, örneğin, Goldbach Tahmini, ikiden büyük her çift sayı iki asal sayının toplamı ise 'doğru'nun kaplamına alınmalı, değilse de bu kaplamın dışında bırakılmalıdır. Bu iki durumdan hangisinin gerçekleşiyor olduğunu bilmeden de şundan emin olabiliriz:

Goldbach Tahmini, ikiden büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamıysa, ve ancak böyleyse, doğrudur.

Bu son gözlemi genişleterek, önerilen herhangi bir doğruluk tanımının uygunluğuna ilişkin genel bir kıstas oluşturabiliriz:

> **T Uylaşımı**: Aritmetik dili için önerilen bir doğruluk tanımı, ϕ bir aritmetik cümlesi, $\lceil\phi\rceil$ de onun Gödel sayısı olmak kaydıyla
>
> (T) $\lceil\phi\rceil$, ϕ doğru ise, ve ancak böyleyse, doğrudur.
>
> biçimindeki bütün cümleleri, ve ayrıca '$(\forall x)(x\ doğrudur \rightarrow x\ bir\ tümcedir)$'i içeriyorsa *uygundur*[2].

(Burada, 'içermek', katı mantıki içerme anlamına gelmiyor. (T)-cümleleri türetilirken basit sözdizimi yasaları kullanılabilir.)

[2] Burada 'uygun' sözcüğünü 'adequate' sözcüğünü çevirmek için kullanıyorum. 'Uygun' bundan önceki kullanımlarındaysa 'correct' sözcüğünü çevirdi. (ç.n.)

Elimizde T Uylaşımı olduğunda, önerilen bir doğruluk tanımının uygunluğu gerçekten de ispatlanabilir. Church-Turing Savı'nı destekleyecek güçlü örnekler bulabilirsiniz, ancak bu savın matematik ispatını veremezsiniz. Doğruluk içinse tam anlamıyla bir ispat verebilirsiniz.

Tarski'nin, doğruluk kuramı yoluyla başarmış olduğu üç şey vardır. Birincisi uygunluk koşulunu, yani, T Uylaşımı'nı öne sürmesidir. İkincisi bu koşulu karşılayabilecek örnek durumları tasarlamasıdır. Ve üçüncüsü de yine bu koşulu karşılamayacak örnek durumları tasarlamasıdır. Şimdi ikincisine bakalım. Tarski, anlambilime ait olmayan terimlere dayanarak açık bir doğruluk bir vermek istiyordu, yani, aradığı şey, şu biçimde bir karşılıklı koşullu cümleydi:

$$(\forall x)(x\ doğrudur \leftrightarrow \tau(x))$$

Burada, $\tau(x)$ anlambilim terimleri barındırmayacak ve cümle, T Uylaşımı'nın bildirdiği anlamda *uygun* olacaktı. Bu noktada aritmetik dili açısından önemli olan şudur: kapalı bir terimi, imliyor olduğu sayıya götüren Den fonksiyonu $\sum$ tamdeyimleriyle açık bir biçimde tanımlanabilmektedir, dolayısıyla '$Den(x)$' olarak kısalttığımız aritmetik ifade, gerçekten de bir anlambilim terimi değildir; ve aynısı, şu değiştirim işlemi için de geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&(\forall x)[x\ doğrudur \\
&\leftrightarrow (\exists\ aritmetik\ dili\ cümleleri\ kümesi)\Big[(\forall\ kapalı\ terim\ u)(\forall\ kapalı\ terim\ v)\big(Üçlü(8,u,v) \in S \\
&\leftrightarrow Den(u) = Den(v)\big) \\
&\land (\forall\ kapalı\ terim\ u)(\forall\ kapalı\ terim\ v)\big(Üçlü(9,u,v) \in S \leftrightarrow Den(u) < Den(v)\big) \\
&\land (\forall\ cümle\ y)(İkili(10,y) \in S \leftrightarrow y \notin S) \\
&\land (\forall\ cümle\ y)(\forall\ cümle\ z)\big(Üçlü(11,y,z) \in S \leftrightarrow (y \in S \lor z \in S)\big) \\
&\land (\forall\ cümle\ y)(\forall cümle\ z)(Üçlü(12,y,z) \in S \leftrightarrow y \in S \land z \in S)\big) \\
&\land (\forall\ cümle\ y)(\forall\ cümle\ z)\big(Üçlü(13,y,z) \in S \leftrightarrow (y \notin S \lor z \in S)\big) \\
&\land (\forall\ cümle\ y)(\forall\ cümle\ z)\Big(Üçlü(14,y,z) \in S \leftrightarrow \big((y \in S \land z \in S) \lor (y \notin S \land z \notin S)\big)\Big) \\
&\land (\forall\ tamdeyim\ y)(\forall\ sayı\ n)\Bigg(Üçlü(15,n,y) \in S \\
&\leftrightarrow (\forall\ sayı\ k)\Big(y\ {}^{v_n}\!/_{[k]} \in S\Big) \\
&\land (\forall\ tamdeyim\ y)(\forall\ sayı\ n)\Big(Üçlü(16,n,y) \in S \leftrightarrow (\exists\ sayı\ k)\Big(y\ {}^{v_n}\!/_{[k]} \in S\Big) \land x \in S\Big]\Big].
\end{aligned}$$

Bu tanımın T Uylaşımı'nca uygun bir tanım olduğunu göstermek yoğun çaba gerektirmekle birlikte basmakalıptır.

Aritmetik dili yalnızca sayılar hakkında konuşur, ancak bu dil için verilen doğruluk tanımı sayıların yanı sıra kümeler hakkında da konuşur. Doğruluk, şu anlamda, yinelemeli olarak tanımlanır: karmaşık bir cümlenin doğruluk koşulları daha yalın cümlelerin doğruluk koşulları bakımından tanımlanır. Ne var ki burada, yinelemeli tanımları açık tanımlara dönüştürmek için kullandığımız olağan yöntemi uygulayamayız. Bu yöntem, sonlu sayı kümelerini tek bir sayıyla kodlamaya dayanır ve doğruluğu tanımlarken hakkında konuşmamız gereken sayı kümeleri sonsuzcadır. Aritmetik dilinin doğru cümleleri kümesini bizzat aritmetik dilinde tanımlamanın gerçekten de hiçbir yolu yoktur. Aritmetik dili için T Uylaşımı'nca uygun sayılacak bir doğruluk tanımı, ancak bu dilden ifade gücü bakımından daha zengin bir dilde deyimleştirilmelidir. İşte bu, Tarski'nin doğruluk kuramının üçüncü ve olumsuz kısmını oluşturur.

Tarski'nin bu vargısını *reductio ad absurdum* yoluyla ispatlamak için, aritmetik dilinde $\tau(x)$ gibi öyle bir tamdeyim varsayalım ki

$$(\forall x)(x\ doğrudur \leftrightarrow \tau(x))$$

tanımı T Uylaşımı'nca uygun olsun. T Uylaşımı'nca uygun olduğundan ϕ gibi her aritmetik dili cümlesi için

$$([\lceil\phi\rceil\ doğrudur \leftrightarrow \phi)$$

sonucu çıkar. Daha belirli olarak, Gödel'in Kendine Gönderim Lemması'nı kullanarak aritmetik dilinde λ gibi öyle bir cümle bulabiliriz ki

$$(\lambda \leftrightarrow \neg\tau([\lceil\lambda\rceil]))$$

Karşılıklı koşullusu Q'nun bir teoremidir. Elimizde bulunan

$$([\lceil\lambda\rceil]\ doğrudur \leftrightarrow \lambda)$$

(T)-cümlesi ile 'doğru'nun tanımı bize şunu verir:

$$([\lceil\lambda\rceil]\ doğrudur \leftrightarrow \tau(\lceil\lambda\rceil)).$$

Böylece de aradığımız çelişkiyi elde etmiş oluruz.■

Şu ana dek aritmetik dili üzerinde durduk, ancak aynı fikirler diğer dillere de uygulanabilir. T Uylaşımı'nın genelleştirimine göre, verili bir *nesne dil* için uygun doğruluk tanımı

(T) __________doğrudur, __________ise, ve ancak böyleyse.

cümle taslağından, boşlukların gereken şekilde doldurulmasıyla elde edilmiş bütün kaşılıklı koşullu cümleleri gerektiriyor olmalıdır. Birinci boşluk Tarski'nin, nesne dilde yer alan bir cümlenin 'yapılı-betimlemeli' adı dediği şeyle doldurulur. Bu öyle bir addır ki ona sahipseniz cümlenin bizatihi kendisini yeniden üretebilirsiniz. Alıntılama adları gibi Gödel sayıları da yapılı-betimlemeli adlar arasındadır. Ancak, örneğin, '5 Mayıs 2002'de Boston Globe gazetesinin kapak sayfasında, sol sütunda, başlığın altına düşen ilk cümle' böyle bir ad değildir. İkinci boşluk, nesne dil cümlesinin üst dildeki çevirisiyle doldurulur. Ne yazıktır ki Tarski bize bu tür bir çevirinin hangi durumlarda kabul edilebilir olduğuna ilişkin hiçbir şey söylemez.

Tarski'nin açık bir doğruluk tanımı oluşturmak için kullandığı yöntem çok çeşitli formel dillere uyarlanabilir. Bu bağlamda aritmetik dilini eşsiz kılan tek şey, hakkında konuştuğumuz her bir bireyin belli bir rakamla adlandırılmış olmasıdır. Her bireyin bir adının olmadığı durumlarda doğruluğu dolaysızca tanımlayamayız. Mantık 1'de görmüş olduğunuz gibi, bu durumlarda, tanımlamayı *gerçekleme* üzerinden vermemiz gerekir.

Tarski Vargısı da aynı şekilde genelleştirilebilir: verili bir nesne dil için doğruluk tanımı nesne dilin kendisinde değil, ancak daha zengin bir üst dilde verilebilir. Formel diller için, ya da en azından bir çoğu için, bu bir sorun oluşturmaz; doğruluk tanımı doağl dilde, örneğin Türkçe'de, verilebilir. Sorun, doğal bir dilin kendisi için bir doğruluk tanımı vermeye çalıştığımızda ortaya çıkar. Elimizde Türkçe'den (ya da başka herhangi bir doğal dilden) daha zengin bir üst dil yoksa, Türkçe için bir doğruluk tanımı nasıl verebiliriz?

İlk akla gelen yanıt Türkçe için bir doğruluk tanımına ihtiyaç duymayacağımız şeklinde olacaktır. Ne de olsa, Türkçe'ye uygulandığı haliyle doğruluk kavramını açık bir tanıma ihtiyaç duymayacak kadar iyi anlarız. Ne yazık ki bu yanıt bize uzun süre yardımcı olamayacaktır. Evet, açık bir doğruluk tanımına ihtiyaç duymayabiliriz, ancak istediğimiz, dilin nasıl işlediğini anlamaksa, en azından bir doğruluk kavramına ihtiyaç duyacağız. Tarski Sonucu'na daha yakından bakarsak bize doğruluğun tanımlanamazlığından başka bir şey daha gösteriyor olduğunu anlarız: verili bir dil için o dilde deyimleştirilebilir olan kendinde tutarlı bir doğruluk kuramından hiçbir zaman (T)-cümleleri çıkmaz; hatta bu tür bir kuram (T)-cümleleri ile hiçbir zaman tutarlı değildir.

Tarski'nin tanımlanamazlık teoremi, aslında, ilkçağda ortaya çıkmış olan yalancı paradoksunun formel bir kılık kazanmış halinden başka bir şey değildir. Paradoksun ilk kez ortaya çıkışı Kretonlu Epimenides'in Kretonluların her zaman yalan söylediğini savlamasıyladır, ve 'Bu cümle yanlıştır' diyen Eubulides tarafından da daha dolaysız bir biçimde ortaya konmuştur. Eubulides'in paradoksu hemen şu şekilde kolayca yanıtlanabilir: Eubulides'in önermesi ne doğru ne de yanlıştır. Bu kolay bir yanıttır, ancak etkisi kısa sürelidir çünkü Eubulides şunu dediğinde paradoks yeniden belirir: 'Bu cümle doğru değildir'.

Diğer anlambilim kavramlarına da benzer paradokslar musallat olur, örneğin gönderim kavramı *Berry Paradoksu*[3] yüzünden sıkıntıya düşer: Şimdi, kırktan az hece içeren yalnızca sonlu sayıda Türkçe ifade vardır, o halde, *a fortiori*, kırktan az hece içerip aynı zamanda bir doğal sayıya ad olan Türkçe ifadeler

[3] Şu metnin ikinci kısmına bakabilirsiniz: Alfred North Whitehead ve Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, 2. Basım (Cambridge: Cambridge University Press, 1927).

yine sonlu sayıdadır. Her bir Türkçe ifade en çok bir doğal sayıyı adlandırabileceğine göre kırktan az hece içeren hiçbir Türkçe ifadece adlandırılmayan doğal sayılar vardır. Doğal sayılar iyi sıralanmış olduğu için, kırktan az hece içeren hiçbir Türkçe ifadece adlandırılmayan doğal sayıların bir en küçüğü bulunduğunu biliyoruz. Ne var ki bu sayının adı olan Türkçe ifade, yani 'kırktan az hece içeren hiçbir Türkçe ifadece adlandırılmayan en küçük doğal sayı' yalnızca yirmi dokuz hece içermektedir.

Anlambilim paradokslarının en yalını olan *Grelling Paradoksu*[4] gerçekleme kavramına dayanır. Şimdi, kimi Türkçe ifadeler kendi kendilerini gerçekler, kimiyse gerçeklemez. Örneğin 'ad' bir addır, o halde kendi kendini gerçekler. 'Eylem' bir eylem değildir, öyleyse kendi kendini gerçeklemez. 'Çok heceli' kendi kendini gerçeklerken 'tek heceli' kendi kendini gerçeklemez. Peki ya 'kendi kendini gerçeklemez' ifadesi kendi kendini geçekler mi? Verilebilecek iki yanıt da bizi çelişkiye düşürecektir.

Bilgi bir anlambilim kavramı değildir, ancak (bir anlayışa göre) bilgi doğruluğu içerir ki doğruluk bir anlambilim kavramıdır. Bu dolaylı ilinti, anlambilim paradokslarının bilgi kavramını da ilgilendiriyor olmasına yeter. Bunu görebilmek için şu cümlenin *Bilinmeyen Cümle* olduğunu varsayalım:

Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şey bilinmemektedir.

Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şey, Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şeyin bilinmediğidir[5]. Sonuç olarak,

Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şeyin bilinmediği bilinmiyorsa, Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şey bilinmemektedir.

Bilgibilimin başat ilkesi – yani, ϕ biliniyorsa, ϕ – bize şunu verir:

Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şeyin bilinmediği biliniyorsa, Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şey bilinmemektedir.

Bu iki sonucu

[4] Bu, söz konusu paradoksun, daha önce ele aldığımızdan çok az farklı ve aslına daha sadık olan bir örneğidir. Bkz: Kurt Grelling ve Leonard Nelson, "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti", *Abhandlungen der Fries'schen Schule neue Folge* 2 (1908): s. 301-34.

[5] Paradoksu gidermek için umutsuz bir girişim Bilinmeyen Cümle'nin hiçbir önerme dile getirmiyor olduğunu söylemek olurdu. Bu girişimin kısa ömürlü olduğunu Öteki Bilinmeyen Cümle'yi ele aldığımızda görüveririz:

Ya Öteki Bilinmeyen Cümle hiçbir önerme dile getirmez, ya da dile getirdiği önerme bilinmemektedir.

ψ *değil ise* θ.

ψ *ise* θ.

O halde, θ.

biçiminde bir çıkarım oluşturacak şekilde bir araya getirirsek şunu elde ederiz:

Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şey bilinmemektedir.

Şimdi görüyoruz ki bu sonuca, kendilerinden emin olduğumuz öncüllerden kalkarak dikkatlice ve açık seçik yürütülen bir türetimle ulaşmış bulunuyoruz, ve açık ki bu şekilde çıkardığımız sonuçları *bilmekteyiz*. Yani,

Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şeyin bilinmediği bilinmektedir.

Başka deyişle,

Bilinmeyen Cümle'nin söylediği şey bilinmektedir.

İşte bir çelişki. Bu formel olmayan çıkarım aynen Tarski'nin Eubulides Paradoksu'nu formelleştirdiği gibi formelleştirilebilir[6]. Yine, bilgi yerine zorunluluk için de benzer bir çıkarım yapılabilir[7].

Bu paradokslara getirilebilecek, ufak tefek farklılıklarla Whitehead'le Russell ve Tarski tarafından da desteklenen bir çözüm de doğruluk, gerçekleme ve bilgi gibi olağan kavramları sonsuz sayıda kavrama bölmektir. Şimdi, Türkçe'den tüm anlambilim terimleriyle birlikte 'bilir' ve 'zorunlu' gibi anlambilime kısmen ait terimlerin kesilip atılmasıyla elde edilmiş dil Türkçe$_0$ olsun. (Bu terimlerin hangileri olduğu, doğaldır ki tamamen belli olmayacaktır.) Sonra, doğruluk, yanlışlık, gerçekleme ve

---

[6] Bkz. Richard Montague ve David Kaplan, 'A Paradox Regained', *Notre Dame Journal of Formal Logic* 1 (1960): 79-90. Yeniden basımı için bkz. Montague, *Formal Philosophy* (New Haven: Yale University Press, 1974), s. 271-85.

[7] Bkz. Richard Montague, 'Syntactic Treatments of Modality, with Corollaries on Reflexion Principles and Finite Axiomatizability', *Act Philosophical Fennica* 16 (1963): 153-67. Yeniden basımı için bkz. *Formal Philosophy*, s. 286-302.

bilgi gibi tanıdığımız kavramlara benzeyen ancak yalnızca Türkçe$_0$'a uygulanabilen doğruluk$_0$, yanlışlık$_0$, gerçekleme$_0$ ve bilgi$_0$ gibi kavramlar tanımlayalım. Doğruluk$_0$ için bunu yapmanın yolu basitçe şudur: Türkçe$_0$'ın bütün (T)-cümleleri ('doğru' yerine 'doğru$_0$' konarak) aksiyom olarak alınır. Türkçe$_0$'a 'doğru$_0$', yanlış$_0$', 'gerçekler$_0$' ve 'bilir$_0$' gibi yüklemleri ekleyerek elde ettiğimiz dil 'Türkçe$_1$'dir. Yine, 'doğru$_1$', 'yanlış$_1$', 'gerçekler$_1$' ve 'bilir$_1$' gibi 'Türkçe$_1$'e uygulanabilir olan yüklemler tanımlarız. Aynı şekilde 'doğru$_1$', Türkçe$_1$'in (T)-cümlelerin aksiyom olarak alınmasıyla tanımlanabilir. Bu son yüklemlerin eklenmesiyle elde edilen yeni dil de 'Türkçe$_2$' olarak adlandırılır ve bu yeni dile uygulanabilir olan 'doğru$_2$', 'yanlış$_2$', 'gerçekler$_2$' ve 'bilir$_2$' gibi yüklemler tanımlanır.

Bu işlem yoluyla, tüm 'doğru$_n$'leri, 'yanlış$_n$'leri, 'bilir$_n$'leri ve 'gerçekler$_n$'leri yüklemler olarak barındıran Türkçe$_\infty$ dili oluşturulur. Türkçe$_\infty$'da, dilin bütününe (yani Türkçe'ye) uygulanabilir olan genel geçer doğruluk kavramları yer almaz, bunun yerine bu dilin her bir cümlesi ya yeterince büyük bir n için doğru$_n$, ya da yeterince büyük bir n için, yanlış$_n$'dir.

Bu mantıki inşa Türkçe$_\infty$ için çok da doyurucu bir anlam kuramı üretmez, çünkü sezgiler için son derece açık olan birşeyi, yani Türkçe$_\infty$'un doğru cümlelerinin, yeterince büyük n'ler için doğru$_n$ olan cümleler olduğu gerçeğini dışarıda bırakır. Üstelik bu inşa Türkçe için bir doğruluk kuramı vermekten tamamen uzaktır, çünkü Türkçe'de, 'doğru$_0$', 'doğru$_1$', 'doğru$_2$'... gibi yüklemler değil 'doğru' yüklemi yer alır.

Yalancı paradoksu bizi çok zor durumda bırakır. Tarski'nin de farkına varmış olduğu gibi bu paradoks bir dilin anlam kuramının aynı dil içerisinde geliştirilemeyeceğini, bunun ancak daha zengin bir üst dilde yapılabileceğini gösterir. Bu da demektir ki doğal diller için bir anlam kuramı geliştirmemizi sağlayacak araçlardan yoksunuz. Peki böyle bir kuram olmadan, konuştuğumuz dillerin etrafımızdaki dünyayla olan bağlantısını nasıl anlayabiliriz?