Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi

Birinci Eksiklik Teoremi. Γ tutarlı bir Σ aksiyomlar kümesi ise ve Q' yu kapsıyorsa, bu durumda Γ' da ispatlanamayan doğru bir cümle vardır.

İspat. Craig Teoremi'ni kullanarak Γ' nın Δ olduğunu kabul edebiliriz. Kendine gönderim lemmasını kullanarak öyle bir ϕ cümlesi bulalım ki

$$Q \vdash (\phi \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner \phi \urcorner]))$$

olsun. Φ, Γ' da ispatlanabilir olsaydı, $\mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner \phi \urcorner])$ doğru bir Σ tümcesi olurdu; dolayısıyla Q' da ve de Γ' da ispatlanabilirdi. Fakat bununla birlikte hem ϕ hem de $(\phi \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner \phi \urcorner]))$ Γ' da ispatlanabildiğinden, $\neg \mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner \phi \urcorner])$ da Γ' da ispatlanabilir. Bu durum Γ' nın tutarlı olmasıyla çelişir.

Φ, Γ' da ispatlanamadığından, $\mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner \phi \urcorner])$ yanlıştır. Bundan dolayı $\neg\mathrm{Bew}_{\Gamma}([\ulcorner \phi \urcorner])$ doğru ve ϕ da doğrudur.$\boxtimes$

Sonuç. Q' yu kapsayan ve ω-tutarlı her Σ aksiyomlar kümesi eksiktir; yani kuramda ne ispatlanabilen ne de çürütülebilen cümleler vardır.

İspat. Daha önce yaptığımız gibi Γ aksiyomlar kümemizi Δ olarak alabiliriz. Φ birinci eksiklik teoreminin ispatında düşünülmüş olan cümle olsun. Φ' ın Γ' da ispatlanamadığını zaten gördük. Dolayısıyla, bütün m' ler için, m, $\ulcorner \phi \urcorner$' ın Γ' daki bir ispatının kodu değildir. B_Γ formülü Q' daki $\{<x,y> : x$ Γ' da y' nin bir ispatının kodudur$\}$' u güçlü bir şekilde temsil ettiğinden $\neg[m]\ B_\Gamma\ [\ulcorner\phi\urcorner]$, Q' da ispatlanabilir, dolayısıyla da Γ' da ispatlanabilir. Γ , ω-tutarlı olduğundan, $(\exists y)\ y\ B_\Gamma\ [\ulcorner\phi\urcorner]$, Γ' da ispatlanamaz. Yani $Bew_\Gamma([\ulcorner\phi\urcorner])$, Γ' da ispatlanamaz ve bundan ötürü $\neg\phi$, Γ' da ispatlanamaz.$\boxtimes$

ϕ, Γ' da ispatlanabilir olmadığından $\neg\phi$, Γ ile tutarlıdır ve dolayısıyla $(\exists y)\ y\ B_\Gamma\ [\ulcorner\phi\urcorner]$ de Γ ile tutarlıdır – bütün m' ler için $\neg[m]\ B_\Gamma\ [\ulcorner\phi\urcorner]$' ın Γ' nın bir sonucu olmasına rağmen. Sonuç olarak, $\Gamma \cup \{(\exists y)\ y\ B_\Gamma\ [\ulcorner\phi\urcorner]\}$, tutarlı ama ω-tutarsız bir kurama örnektir.

Gödel' in ispatından kısa süre sonra, Barclay Rosser ω-tutarlılık varsayımının gerekenden daha kuvvetli olduğunun farketmiştir.

> **Daha Kuvvetli Sonuç** (Rosser). Q' yu kapsayan ve tutarlı olan herhangi bir Σ aksiyomlar kümesi eksiktir.

Rosser bunu, aşağıdaki ifadeye ispat kuramı bakımından denk olan bir σ tümcesi kurarak ispatlamıştır:

$$(\forall y)(y\ B_\Gamma\ [\ulcorner\sigma\urcorner] \rightarrow (\exists z<y) z\ B_\Gamma\ [\ulcorner\neg\sigma\urcorner]).$$

Verilen ispat, her Δ kümesinin kuvvetli bir şekilde temsil edilebildiğinin ve her Σ fonksiyonunun fonksiyonel olarak temsil edilebildiğinin ispatlarına oldukça benzerdir. Aslında bu ispatların fikri temeli Rosser' ın ispatıdır. Rosser' ın fikrini her Δ kümesinin kuvvetli olarak temsil edilebildiğini ispatlamak için kullandığımızdan, şöyle bir ispat yapabiliriz:

> **Daha Kuvvetli Sonuç.** (Tarski, Mostowski, and Robinson). Q' da ispatlanabilen cümleleri barındırıp, çürütülebilenleri dışarıda bırakan herhangi bir Δ kümesi yoktur.

Bunun Rosser' ın sonucunu işaret ettiğine dikkat ediniz; çünkü Γ eksiksiz olsaydı, Γ' nın sonuçları kümesi Σ olurdu ve Γ' nın sonuçları kümesinin tümleyeni, yani {cümle olmayanlar} $\cup$ {θ tümceleri: $\neg\theta$, Γ' nın bir sonucudur}da Σ olurdu.

İspat. D' nin Q' da ispatlanabilen cümleleri kapsayıp çürütülebilen tümceleri kapsamayan bir Δ kümesi olduğunu varsayalım. $\delta(x)$, D' yi Q' da güçlü bir şekilde temsil ediyor olsun ve kendine gönderim lemmasını şu η tümcesini bulmak için kullanalım

$$Q \vdash (\eta \leftrightarrow \neg\, \delta\, ([\ulcorner \eta \urcorner])).$$

D' nin Q' da çürütülebilen tümceleri dışarıda bıraktığı varsayımının aksine, $\ulcorner \eta \urcorner$, D' de ise o zaman $\delta\, ([\ulcorner \eta \urcorner])$, Q' da ispatlanabilir ve η, Q' da çürütülebilir. Bu durumda $\ulcorner \eta \urcorner$, D' de olmamalıdır. Yani, D' nin Q' da ispatlanabilen cümleleri barındırdığı varsayımının aksine, $\neg\delta([\ulcorner \eta \urcorner])$' yi Q' da ispatlayabiliriz ve η de Q' da ispatlanabilir. Çelişki.$\boxtimes$

Bir kuram, sonuçlarının kümesi Δ ise, ve ancak böyleyse, *karar verilebilir*dir. Bu kullanım kafa karıştırıcıdır. Peano Aritmetiği'nin karar verilebilir olduğunu söylerseniz, doğru bir şekilde bir cümlenin PA’ nın bir aksiyomu olup olmadığını belirlemek için bir algoritmanın varlığını belirtiyor veya yanlış bir şekilde bir tümcenin PA’ nın aksiyomlarının bir sonucu olup olmadığını belirlemek için bir algoritma olduğunu belirtiyor olabilirsiniz. Uygulamada yerleşmiş olan, ikinci okumayı kabul etmektir; ancak bu kolaylıkla kafa karıştıran bir uygulamadır. Bu durum sıklıkla yapılan bir hatadan, “kuram” ile kastedilenin bir aksiyomlar kümesi mi yoksa bir aksiyomlar kümesinin sonuçlarının kümesi mi olduğunu açıklığa kavuşturamamaktan kaynaklanır. Bu talihsiz kullanımı sürdürerek aşağıdakine ulaşırız:

Teorem. Karar verilebilir hiçbir kuram Q ile tutarlı değildir.

İspat. Burada Q’ nun, PA’ dan farklı olarak, tek bir cümle olarak yazılabiliyor oluşunu kullanacağız. Ω, Q ile tutarlı karar verilebilir bir kuram olsaydı, {ϕ tümceleri: (Q → ϕ), Ω’ nın bir sonucudur} kümesi, Q’ nun sonuçlarını barındıran ve Q’ da çürütülebilen cümleleri barındırmayan bir Δ kümesi olurdu.⊠

Church’ un Teoremi. Yüklemler dizgesinde geçerli olan cümlelerin kümesi Δ değildir.

İspat. Geçerli cümleler kümesi Q ile tutarlıdır; öyleyse karar verilebilir bir kuram olmaması beklenir. ⊠

ϕ, PA’ nın Gödel cümlesi ise – yani, “PA’ da ispatlanabilir değilim” diye belirten cümle – bu durumda ϕ, PA’ da ispatlanabilir olmasa da, ϕ’ nin doğru olduğunu kabul edebiliriz. Sonuç olarak, PA doğru olarak kabul ettiğimiz her şeyi barındırmaz. PA’ nın bu durumu özel bir durum değildir. PA’ yı en sevdiğiniz Σ kuramı ile değiştirin – yine aynı cevabı alırsınız.

Γ’ yı aritmetik dilinin doğru kabul edebileceğimiz cümlelerinin kümesi olarak alırsak ne olacağına bakalım. Bununla yalnızca formel sistemde ispatlayabileceğimiz cümleleri kastetmiyorum. Kullanılabilecek her türlü bilme yöntemiyle doğruluğunu kabul edebileceğimiz cümleleri kastediyorum. Bu bilme yöntemlerinden bir tanesi ispattır ve bir cümle doğru olarak kabul edilebilen başka cümlelerden ilkece çıkarılabiliyorsa, bu çıkarım uygulamada baş edilemeyecek denli karmaşık olsa dahi o cümleyi doğru kabul edeceğiz.

Γ’ nın Σ olduğunu varsayarak, Γ 'nın Gödel cümlesini oluşturabiliriz. Φ, Γ’ dan çıkarılamıyor olsa bile, ϕ’ yı doğru kabul edebiliriz. Burada biraz duralım. Γ’ nın doğru olarak kabul edebileceğimiz her şeyi barındırması gerekiyordu, ne var ki ϕ doğru olarak alınabilecek bir cümle olmakla birlikte Γ’ nın bir sonucu değildir.

J.R.Lucas’ ın[1] bundan çıkarmamızı istediği sonuç, doğru kabul edebileceğimiz aritmetik cümlelerin kümesinin Σ olmadığıdır. Bu felsefi önem taşıyan bir neticedir. İnsan

1

[1] “Minds, Machines, and Gödel”, *Philosophy* 36 (1961): 120-24. Çıkarım Roger Penrose tarafından devam ettirilmiştir, *The Emperor’s New Mind (*New York ve Oxford: Oxford University Press, 1989).

zihnini anlamanın yolunun, onu devasa bir hesaplama makinesi olarak incelemek olduğunu kabul eden hesaplamacı zihin modeli için vahim sonuçlar doğurur. Fakat ortaya çıkan sonuçlar bununla da kalmaz. İnsan zihninin yaptıkları bir Turing makinesiyle taklit bile edilemez. Sembolik girdiler alıp yine sembolik çıktılar veren sıradan herhangi bir mekanik aletin işlemleri bir Turing makinesi ile temsil edilebilir. Bu, çelik ve plastikten müteşekkil, silikon tabanlı bir ana işlemciye sahip aygıtların yanı sıra et ve kandan müteşekkil, karbon tabanlı bir ana işlemciye sahip mekanik aygıtlar için de geçerlidir. İnsan zihniyse herhangi bir mekanik sistemin taklit edemeyeceği ilahi parıltılar taşır.

Pek çok filozof Lucas' ın argümanına karşı koymaya çalışmıştır ancak argümanın hangi kısmının reddedileceğine dair bir fikir birliği oluşmamıştır. Lucas'a karşıt fikirlerden biri şudur: Gödel cümlesinin varlığının kendi başına şaşırtıcı bir sonucu yoktur. Lucas' ın çıkarımını gerçekten işler kılan, Gödel cümlesini açıkça yazabilecek ve bir kez yazdık mı doğru kabul edebilecek olmamızdır. Sonuçlarının tamamı, doğru kabul edebileceğimiz aritmetik cümleler olan bir Σ cümleler kümesinin varlığı, böyle bir Gödel cümlesi yazabilmemiz için yeterli değildir. Σ kümesini açıkça tayin de edebiliyor olmamız gerekir. Lucas' ın çıkarımından çıkarılacak sonuç, insan zihninin yaptıklarını (ya da en azından insanın zihni etkinliğinin aritmetiğe hasredilmiş kısmını) temsil edebilecek bir bilgisayar programının olmadığı değildir. Varılacak sonuç, böyle bir program varsa, onun ne olduğunu söyleyemeyeceğimiz ya da yeterince kesin bir biçimde bu programı ve Gödel cümlesini yazamayacağımızdır.

Bu tür bir cevap Lucas' ın vardığı sonuca karşı koyabiliyor olsa da bizi Lucas' ın işaret ettiği yolun biraz aşağısına sürükler. Bir saat veya hesap makinesi gibi sıradan bir mekanik aygıtı ele aldığımızda, aygıtın tam olarak nasıl çalıştığını - arka kapağı söküp aygıtı yakından inceleyerek – görmenin mümkün olduğunu anlarız. Aynı şeyi gerçek hayatta bir insana yapmanın büyük zorlukları vardır. Fakat Gödel' in teoreminden önce bir insan için kendi programını bilmenin *ilkece* imkânsız olduğunu da düşünmüyorduk. Ne var ki, mekanik bir aygıtın nasıl çalıştığını ayrıntısıyla bilmek en azından kuramda mümkün olmakla birlikte bir insan için kendi programını kuram düzeyinde dahi bilmek imkânsız olduğundan, insanın salt mekanik bir aygıttan aslen farklı olduğu görülür. Uluhiyet kıvılcımları, kor halinde bile olsa, hala oradadır.

Buna cevap olarak, bir failin doğru sayabileceği cümleleri bilmek için, failin zihninin nasıl çalıştığını ayrıntılı olarak bilmenin yeterli olmayacağı söylenebilir. Hangi aritmetik cümlelerin doğru olduğunu da bilmek gerekir; bir cümlenin doğru kabul edilebilmesi için, o cümle doğru da olmak zorundadır. Bir failin sadece zihin durumunu inceleyerek, failin ne gibi cümleleri doğru kabul ettiğini, yani hangi cümlelere inandığını belirlemekten ötesini umamayız. Cümleleri doğru olarak kabul etme edimlerinden hangilerinin doğruyu bilmek sayılması gerektiğini söylemek için, failin iç durumunun yanı sıra doğal sayılar sistemini de tanımamız gerekir. Lucas'ın çıkarımını başlatabilmek için, Γ' yı, failin doğru olarak tanıyabildiği cümlelerin kümesi değil de, faildeki inanç oluşturma işlemlerinin failin doğru kabul etmesine izin verdiği cümlelerin kümesi olarak almalıyız. Fakat Lucas' ın çıkarımı bu düzeltmeden sonra şunu gösteriyor olmaz mı: tamamen mekanik olan bir sistemi yakından inceleyerek sistemin çıktılarını ortaya koymak ilkece mümkün olsa bile, aynısını insan aklının çıktıları için yapmak imkansızdır?

Olmayabilir. Birinci Eksiklik Teoremi, Γ tutarlı ise, Γ' ya karşılık gelen Gödel cümlesinin doğru olduğunu gösterir. Peki, doğru kabul ettiğimiz aritmetik cümlelerin kümesinin tutarlı olduğunu nasıl bileceğiz? Gayet tabi ki bu kümenin tutarlı olduğunu ummak isteriz; fakat inanç oluşturma mekanizmasını inceleyerek bir çelişki üretip üretmediğini söylemeyi bekleyemeyiz ve bu sebeple verili bir Turing makinesinde bir aksaklık olup olmayacağını onun programını inceleyerek söyleyemeyiz. İkinci Eksiklik Teoremine geldiğimizde ayrıntısıyla göreceğimiz gibi, tutarlı aritmetik kuramları kendi tutarlılıklarını ispatlayamazlar. Elimizdeki Gödel cümlesinin doğruluğundan emin olamayız, çünkü inançlarımızın tutarlılığından emin olamayız. Nihayetinde karşılaştığımız şey ilahi parıltılar değil, bir alçakgönüllülük çağrısıdır.

Gödel' in teoreminin felsefi sıkıntılara sebep olduğu bir diğer yer matematiğin temelleriyle daha doğrudan alakalıdır. Matematikçiler, on dokuzuncu yüzyıl öncesinde yaptıkları işlerle ilgili herhangi bir güven sıkıntısı yaşamıyorlardı. Geometriciler uzayın yapısını çalışıyorlardı (bu yapının bizim uzayı temsil etme yollarımızdan ne kadar bağımsız olduğu tartışmalı olsa da). Ökliddışı Geometrilerin belirmesiyle, bu çalışma şekli savunulamaz hale geldi. Geometriciler farklı ve birbirleriyle bağdaşmayan pek çok sistemi çalışmaktalar ve gerçekliğin yapısını hepsi birden tarif ediyor olamaz.

Geometriye dair geleneksel tutum Platoncu değil bir tür Aristotelesçi gerçekçilikti. Platon' a göre matematiksel varlıklar kendilerine has katıksız bir âlemde, bedenlerin ve algıların değişimlerinden bağımsız, ebedi-ezeli olarak vardırlar. Doğmadan önce saf ve bozulmamış olan aklımız onları doğrudan algılayabilirken, şimdi bedenlere sahip olduğumuzdan matematiksel anlama yetimiz, önceden açıkça görebilmiş olduklarımızı anımsamaktan ibarettir. Çağdaş düşünürler matematiksel bilginin nasıl edinildiğinin bu açıklamasını akla yatkın bulmazlar ve bundan dolayı matematiksel Platoncular için (matematikçilerin, gerçekten var olup da uzay ve zamanda olmayan şeyleri çalıştıklarına inananlar için) ortaya temel bir güçlük çıkar: Madem bizi etkilemiyorlar, bu şeyleri nasıl bileceğiz? Nedensel bir eylemleri yoksa neden bilimsel açıdan bu kadar kullanışlılar?

Aristotelesvari gerçekçilik bu güçlükten sakınıyordu. Aristoteles' in matematiksel nesneleri Platon' un nesnelerinin olduğundan farklı bir anlamda "soyut"tu. Aristoteles'e göre geometriciler sıradan fiziki nesneleri çalışıyorlardı ve bu nesneleri "soyut" bir bakış açısıyla, büyüklük, biçim ve konumu dikkate alıp renk, desen, ağırlık, koku ve tadı göz ardı ederek değerlendiriyorlardı. Bu bakış açısı, Ökliddışı geometrilerin ortaya çıkışıyla cazibesini iyice kaybetti.

On dokuzuncu yüzyılın sonuna doğru, matematikçilerin ne yaptığına dair bir başka değerlendirme biçimi göze çarpar oldu. Buna göre matematik herhangi bir şeyle "ilgili" değildir. Matematikçilerin yaptığı, aksiyom sistemlerinin sonuçlarını dökmektir. Hangi aksiyomun maddi gerçekliği tarif etmekte kullanışlı olacağı matematikçiyi ilgilendiren bir soru değil, fizikçinin uğraşacağı bir sorudur. Matematik dilinin, aksiyomların doğru kılacak herhangi bir yorumu varsa, aynı yorumun teoremleri de gerçekleyeceğinden emin olabiliriz. Fakat matematikçi bu türden bir yorumun varlığı veya yokluğu üzerine düşünmez.

"Formalist" bakış açısı, cebircilerin yaptıklarını doğru tarif eder. "Grup", grup teorisinin aksiyomlarını gerçekleyen herhangi bir şeydir ve bir grup kuramcısının yaptığı da aksiyomları gerçekleyecek her şey için geçerli olan özellikleri keşfetmektir. Bu resim, sayı kuramcılarının yaptıklarını yakalayamaz. Sayı kuramının aksiyomlarını ne olarak alırsak alalım, bu aksiyomların sonucu olmayan ve doğru – dilin “tercih edilen model”inde doğru - kabul edilebilecek başka ifadeler de olacaktır. Bunun böyle olduğunu göstermekle, Birinci Eksiklik Teoremi, formalist konumun sürdürülmesini zorlaştırır.