Kendine Gönderim

Aşağıdaki sonuç modern mantığın köşetaşlarından biridir:

Kendine Gönderim Lemması. Herhangi bir $\psi(x)$ tamdeyimi için, öyle bir ϕ cümlesi vardır ki $(\phi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\phi\urcorner))$ Q'nun bir sonucudur.

İspat: Bu lemmanın ispatı iki kısımdır. Zor olan kısım kullanılacak ϕ cümlesini bilmek, kolay olan ise bunun çalıştığını doğrulamaktır. Daha zor olan kısım için, asıl fikir Gödel'in kendi makalesinde[1] yer alıyor olsa da, Gyorgy Sereny'nin "Gödel, Tarski, Church and the Liar"[2] başlıklı sunuşunu takip edeceğim.

Asıl fikir M.Ö 6. yüzyıla, Giritli Epimenides' in "Giritliler her zaman yalan söyler" dediği zamana kadar gider. Giritlilerin söylediği diğer her şeyin yalan olduğunu varsayarsak, pek de hoş olmayan bir sonuçla karşılaşmamız kaçınılmazdır. Epimenides' in dediğinin doğru olduğunu varsayarsak, bu onun bir yalan olduğu anlamına gelir; ancak Epimenides yalan söylüyorsa da, dediği şey doğrudur. Epimenides bu dediğinin çelişkili doğasının farkında mıydı bilinmez, ama Aristoteles'in çağdaşı olan Miletli Eubulides bu söylenendeki biliş sorununun tam anlamıyla farkındaydı ve bizden "Şu anda yalan söylüyorum." diyen birinin ne demiş olduğunu değerlendirmemizi isteyen de oydu.

---

[1] "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931): 173-198. Jean van Heijennoort 'un hazırladığı *From Frege to Gödel* (Cambridge, Mass ve Londra: Harvard University Press, 1967) s. 596-616 ile Martin Davis'in hazırladığı *The Undecidable* (Hewlett, N.Y.: Raven Press, 1965), s. 4-38 'deki İngilizce çeviriler.

[2] *Bulletin of Symbolic Logic 9 (2003): 3-25*

Eubulides ile anılan diğer meşhur açmazlardan bazıları da *zincirleme tasım* (*sorites*) (bir saman yığınından bir tek çöp alınca geriye kalan yine bir saman yığınıdır; işlem birçok defa tekrarlandığında varılan sonuç eldeki saman yığınının hiçbir saman çöpü içermediğidir.) ve *kapüşonlu adam'dır* (*hooded man*). (Kapüşonlu adamın kim olduğunu bilmezsiniz ama babanızı tanırsınız ve siz bilmeseniz de kapüşonlu adam babanızdır. Bu durum mantıki bir ilke olan, aynı şeyi gösteren isimlerin birbirinin yerine geçebilmesi ile çelişir.) Bir bakıma Eubulides' in çıkarımı Epimenides' in çıkarımından daha keskindir, çünkü insanın bütün komşularının yalancılığına bağlı değildir. Başka bir açıdan ise, "şu anda" ve "ben" gibi belirleyiciler içerdiğinden bizi yeni bir karışıklık düzeyine taşır. Bu karışıklıktan sakınmak için *Scientific American*' ın[3] Haziran 1969 sayısının 65'inci sayfasına bakabilirsiniz. Orada kırmızı renkte basılmış olan şu cümle ile karşılaşacaksınız: *Scientific American* 'ın Haziran 1969 sayısının 65'inci sayfasına kırmızı olarak basılmış olan cümle yanlıştır. Bu hala şu andaki amaçlarımız için aradığımız şey değildir. Şu andaki amaçlarımız için yalancı açmazını (ψ'yi "yalandır" ın yerine koyarak) aritmetik dilinde yeniden uyarlayacağız . Kimin neyi, ne zaman ve nerede söylediğine dair kesin olmayan olgular aritmetik dilinde anlatılamazlar. Aritmetik dilinde anlatılabilecek olan, Gödel kodlaması ile açıklayabileceğimiz söz dizimidir (sentakstır). Bizim incelemek istediğimiz yalancı açmazının, malum cümleyi salt sözdizimi öğeleriyle belirten halidir.

---

3 Bu Tarski'nin makalesidir, "Truth ans Proof"

Yalancı açmazının tamamen sentaktik bir örneği Quine tarafından verilmiştir:[4]

“Kendi alıntılamasına eklendiğinde bir yanlışlık doğurur ” kendi alıntılamasına eklendiğinde bir yanlışlık doğurur.

Quine’ nin düzenlemesi hoş bir biçimde genellenir. Verilen bir P özelliği üzerinden aşağıdaki cümleyi inceleyiniz.

“Kendi anlıntılamasına eklendiğinde P özelliğinde bir cümle doğurur” kendi alıntılamasına eklendiğinde P özelliğinde bir cümle doğurur.

Cümle, P özelliğine sahipse, ve ancak böyleyse, doğrudur.

Bu tam olarak bizim aradığımız şey değildir; çünkü doğal dilin (örneğin İngilizce'nin) formel dil ile paylaşmadığı bir sözdizimi özelliğine, (karmaşık olabilecek) bir isim öbeğinin (yine karmaşık olabilecek) bir yüklem öbeğine bağlanarak bir cümle oluşturulabilmesine dayanır. Genellenebilen bir başka deyimleştirme, bir isim öbeğinin bir değişken yerine kullanılması işlemini uygular.[5] *Grelling açmazı*[6] bizden açık tümceleri kendini doğrulayanlar ve doğrulamayanlar olarak ayırmamızı ister. “x’ in on taneden az

---

4

The Ways of Paradox and Other Essays’ tan “The Ways of Paradox”, (düzeltilmiş), (Cambridge, Mass ve Londra: Harvard University Press), 1976.

5

Belirgin değişkenler, matematik ve bilimde kullanılan doğal dil lehçesinin bir parçasıdır. Günlük dil aşağı yukarı aynı amaç için zamirleri kullanır.

6

Grelling, Kurt ve Leonard Nelson. “Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti.” *Abhandlungen der Fries’schen Schule neue Folge* 2 (1908): 301 – 334.

kelimesi vardır.” on taneden az kelime içerdiğinden kendini doğrular. Bu durum “x’ in beş taneden az kelimesi vardır.” için geçerli değildir. “x İngilizce’nin açık bir cümlesidir.” İngilizce’nin açık bir cümlesidir, yani kendini doğrular. “x Portekizce’nin açık bir cümlesidir” Portekizce’nin açık bir cümlesi değildir, yani kendi kendini doğrulamaz. Ayrıca “x bir attır.” bir at değildir ve bu da kendini doğrulamaz. Şimdi “x kendini doğrulamaz” tümcesini değerlendirelim. Yukarıdaki değerlendirme şekline göre, bu tümce ancak ve ancak kendini doğrulamazsa kendini doğrular.

Grelling açmazını genellemek için göz önünde bulundurulacak olan şudur: bir doğal dil ifadesinin açık bir cümleyi doğrulaması, ifadenin alıntılama isminin açık cümledeki değişkenin yerine konulmasıyla elde edilen cümlenin doğru olmasıyla mümkündür. Dolayısıyla “ x’ in on taneden az kelime içerdiği doğrudur” kendini doğrular, çünkü “ “‘x’ in on taneden az kelimesi vardır”ın on taneden az kelimesi vardır” doğrudur. Bir ifade açık bir cümleyi doğrulamıyorsa, bu durumda ifadenin alıntılama isminin açık cümledeki değişken yerine konulması sonucunda elde edilen cümle yanlış olur. “x bir attır” kendini doğrulamaz ve “ ‘x bir attır’ bir attır” yanlıştır. S açık bir cümle olmak kaydıyla, S’ nin alıntılama isminin S’deki değişken yerine konulmasıyla elde edilen cümle yanlışsa, ve ancak böyleyse, S kendini doğrulamaz. Grelling açmazı, “x açık cümlesinin alıntılama ismi, cümledeki değişkenin yerine konulduğunda yanlış bir cümle elde edilir.” cümlesinin alıntılama ismi, cümledeki değişkenin yerine kullanıldığında yanlış bir cümle elde edilip edilmediğini sormaktan ibarettir. Bu, bize Eubulides açmazının, çelişkili cümleyi tamamen sözdizimi özellikleriyle tanımlayan bir örneğini verir.

“Bu cümle yanlıştır” cümlesi kendi yanlışlığını öne süren bir cümledir; fakat bunu “bu” işaret sıfatını kullanarak yapar ve işaret sıfatları formel aritmetik dilinde mevcut değildir. “ “x açık cümlesinin alıntılama ismi cümledeki değişkenin yerine konulduğunda elde edilen cümle yanlıştır” cümlesinden alıntılama isminin değişkenin yerine konulmasıyla yanlış bir cümle elde edilir” cümlesi de benzer şekilde kendi yanlışlığına işaret eder ve bunu işaret sıfatlarına bağlı kalmadan yapar. Şu anda odaklandığımız şey yalancı açmazı değildir. Söylemek zorunda kalacaklarımız tatmin edici olmaktan çok uzak kalacak olsa da, bu açmazdan daha sonra yeniden bahsedeceğiz. Kendine Gönderim ile uğraşıyoruz ve genellikle aynı yapıdaki düşüncelerle çalışıldığı için şanslıyız. Bilhassa, elimizde bir P özelliği varken, “P özelliğini taşıyan bir tcümle “P özelliğini taşıyan bir cümle x açık cümlesinde alıntılama isminin değişken yerine kullanılmasından elde edilir” açık cümlesinde alıntılama isminin değişken yerine geçirilmesinden elde edilir” cümlesi, P özeliğine sahipse, ve ancak böyleyse, doğrudur.

Bu yaptığımızı doğal dilden formel dile çevirirken alıntılama ismi yerine Gödel sayılarını kullanırız. Bir sayıya karşılık gelen rakam için o sayıyı bir Gödel sayısına çevirerek bir Z fonksiyonunu tanımlarız.

$$Z(0) = \ulcorner 0 \urcorner = 4$$

$$Z(n+1) = \ulcorner [n=1] \urcorner = \text{İkili}\ (4, Z(n))$$

Yinelemeli tanımları daha açık tanımlara çevirmenin alışılmış yöntemi Z’ nin **Δ** olduğunu gösterir.

Bir tamdeyimin kod numarasını alan ve bir terimin "x" değişkeninin tamdeyim içindeki bağsız geçişleri yerine konulmasıyla elde edilen kodunu, tamdeyimin koduna alan kısmi fonksiyon Δ dir.[7] Bir terimi başka bir terimin yerine yazmak için kullanılacak tamdeyimi açık bir şekilde yazdık; bir terimi (?) başka bir terimin (?) yerine yazmak için kullanılacak tamdeyim buna tamamen mukabildir. Şu anda bu tamdeyimi yazmayacağım; ama isteseydim yazabilirdim. Bir n sayısını [n] olarak alan bir Z tamdeyiminin $\boldsymbol{\Delta}$ olduğunu zaten söyledik. İkisini birleştirince:

g(n) = n, tek bağsız değişkeni "x" olan bir tamdeyimin kodu ise, n ile kodlanmış tamdeyimde "x" in bağsız geçişleri yerine [n] konularak elde edilmiş olan cümlenin kodu;

= öteki türlüyse, 0;

tarafından verilen g fonksiyonunun $\boldsymbol{\Delta}$ olduğunu görürüz; dolayısıyla bunu fonksiyonel olarak temsil eden bir $\boldsymbol{\gamma}$(x,y) tamdeyimi vardır.

Grelling açmazının genellenmiş haliyle, yani "P özelliği" nin yerini "$\boldsymbol{\psi}$(x)" in almasıyla devam edelim; elimizdeki tamdeyim $\boldsymbol{\theta}$(x) olsun

$(\exists y)$ (y bir tümcedir $\wedge$ $\boldsymbol{\gamma}$(x,y) $\wedge$ $\boldsymbol{\psi}$ (y)).

k, k'nin Gödel sayısı ve ϕ de cümle olsun

---

7 Aslında "x" formel dilin bir değişkeni değildir; resmi değişkenler "x_0", "x_1", "x_2" vs'dir. Fakat ben altsembolleri sevmediğimden "x" bir değişkenmiş gibi davranacağım.

$$(\exists y)\,(y \text{ bir cümledir} \wedge (\gamma([k],y) \wedge \psi(y)).$$

Bu durumda $\ulcorner\phi\urcorner = g(k)$, ve

$$Q \vdash (\forall y)\,(\gamma([k],y) \leftrightarrow y = [\ulcorner\phi\urcorner]\,).$$

Ayrıca,

$$Q \vdash [\ulcorner\phi\urcorner] \text{ bir cümledir.}$$

Sonuç olarak,

$$Q \vdash ((\exists y)\,([\ulcorner\phi\urcorner] \text{ bir cümledir} \wedge \gamma([k],y) \wedge \psi(y)) \leftrightarrow \psi([\ulcorner\Phi\urcorner])),$$

Yani,

$$Q \vdash (\phi \leftrightarrow \psi([\ulcorner\phi\urcorner])).\ \boxtimes$$

Genelleştirilmiş Kendine Gönderim Lemması. Her $\psi(x, z_1, z_{2,\ldots,}z_n)$ tamdeyimi için şunu sağlayan bir $\phi(z_{1,}\, z_{2\ldots}z_n)$ tamdeyimi vardır:

$$Q \vdash (\forall z_1)\,(\forall z_2)\ldots(\forall z_n)\,(\phi(z_1,z_{2,\ldots,}z_n) \leftrightarrow \psi\,(\ulcorner\phi\urcorner, z_1, z_2, \ldots, z_n)).$$

İspat: Kendine Gönderim Lemmasının ispatında, fazladan olan değişkenlerin bir etkisi yoktur.$\boxtimes$