Peano Aritmetiği

Peano Aritmetiği[1] veya *PA*, Robinson Aritmetiği'ne *tümevarım aksiyom taslağ*ını ekleyerek elde ettiğimiz sistemdir:

$$((R(0) \land (\forall x)(R(x) \rightarrow R(sx))) \rightarrow (\forall x)R(x)).$$

Bu şu anlama gelir: “R” taslak harfi yerine bir tamdeyim koyduktan sonra bütün bağsız değişkenleri bağlamak için başa tümel niceleyiciler eklemek suretiyle taslaktan elde ettiğimiz aritmetik dilinin herhangi bir cümlesi, PA'nın bir aksiyomudur. Böylelikle PA, sonsuz sayıda *tümevarım aksiyomu*nun yanı sıra (Q1)'den (Q11)'e kadarki aksiyomlardan oluşur.

Tümevarım aksiyom taslağı, doğal sayılar hakkında akıl yürütürken kullanılan tanıdık bir yöntemi formelleştirir. Her doğal sayının, “R” yerine koyduğumuz tadeyimin ifade ettiği özelliğe sahip olduğunu göstermek için 0'ın bu özelliğe sahip olduğunu göstererek başlarız; bu *kaynak durum*dur. Daha sonra koşullu ispat yoluyla

$$(\forall x)(R(x) \rightarrow R(sx))$$

koşullusunu türetiriz; R(x)'i *tümevarım varsayımı* kabul eder, sonra da R(sx)'i türetiriz. Matematiksel tümevarım kuralı, (∀x)R(x)'e varmamıza imkan verir.

Esas itibariyle doğal sayılar hakkındaki bütün olağan matematiksel akıl yürütmelerimiz PA'da formelleştirilebilir. Doğrusu, çocukluktan beri sorgusuz sualsiz kabul ettiğimiz temel aritmetik hakikatlerinin ispatlarını üretirken yaşadığımız en

---

1

Peano aksiyomları denilen aksiyomlar ilk olarak Richard Dedekind tarafından deyimleştirildi. Peano bunlardan sadece bir dipnotun izin verdiği kadarıyla bahsetmiş olsa da kullanılagelen isim “Peano Aritmetiği” oldu.

başlardaki hantallık bir yana bırakıldığında, PA'daki akıl yürütme, olağan aritmetik düşünmeden neredeyse ayırt edilemezdir.

Yalnızca neler olup bittiğine dair bir fikre sahip olmak uğruna bu başlangıç ispatlarının birkaçını formel olmayan bir şekilde burada icra edeceğim.

Önerme 1. PA $\vdash (\forall x)(x = 0 \lor (\exists y)x = sy)$.

İspat: Aşağıdaki tümevarım aksiyomunu kullanırız:

$$[[(0 = 0 \lor (\exists y)0 = sy) \land (\forall x)((x = 0 \lor (\exists y)x = sy) \rightarrow (sx = 0 \lor (\exists y)sx = sy))] \rightarrow (\forall x)(x = 0 \lor (\exists y)x = sy)]$$

Öncül, salt mantığın bir teoremidir.☒

Önerme (Proposition) 2. PA $\vdash (\forall x)(0 + x) = x$.

İspat: Aşağıdaki tümevarım aksiyomunu kullanırız:

$$[[(0 + 0) = 0 \land (\forall x)((0 + x) = x \rightarrow (0 + sx) = sx)] \rightarrow (\forall x)(0 + x) = x]$$

"$(0 + 0) = 0$" kaynak cümlesi (Q3)'den çıkar. Tümevarım adımını elde etmek için $(0 + x) = x$ tümevarım varsayımı (TV) olarak alınır. Şunu elde ederiz:

$$(0 + sx) = s(0 + x) \quad [\text{(Q4) yoluyla}]$$
$$= sx \quad [\text{TV yoluyla}].☒$$

Önerme (Proposition) 3. PA $\vdash (\forall x)(\forall y)(sx + y) = s(x + y)$.

İspat: Aşağıdaki tümevarım aksiyomunu kullanırız:

$$(\forall x)[[(sx + 0) = s(x + 0) \land (\forall y)((sx + y) = s(x + y) \rightarrow (sx + sy) = s(x + sy))] \rightarrow (\forall y)(sx + y) = s(x + y)].$$

Kaynak cümle kolaydır. (Q3)'ün iki kez uygulanışı şunu sağlar

$$(sx + 0) = sx$$
$$= s(x + 0)$$

Tümevarım adımını elde etmek için şunu TV olarak alırız:

$$(sx + y) = s(x + y).$$

Şunu elde ederiz:

$(sx + sy) = s(sx + y)$ [(Q4) yoluyla]

$= ss(x + y)$ [TV yoluyla]

$= s(x + sy)$ [tekrar (Q4) yoluyla].⊠

<u>Önerme</u> 4 <u>(Toplamanın yer değiştirme yasası)</u>. PA $\vdash (\forall x)(\forall y)(x + y) = (y + x)$.

İspat: Şu tümevarım aksiyomunu kullanırız:

$$(\forall x)[[(x + 0) = (0 + x) \land (\forall y)((x + y) = (y + x) \rightarrow (x + sy) = (sy + x))] \rightarrow (\forall y)(x + y) = (y + x)].$$

(Q3) bize "(x + 0) = x"i ve Önerme 2 de bize "(0 + x) = x"i verir; bunlar beraberce kaynak cümle "(x + 0) = (0 + x)"i sağlar. Tümevarım adımını elde etmek için şunu TV olarak alırız:

$$(x + y) = (y + x).$$

Ve şunu elde ederiz:

$(x + sy) = s(x + y)$ [(Q4) yoluyla]

$= s(y + x)$ [TV yoluyla]

$= (sy + x)$ [Önerme 3 yoluyla]⊠

Önerme 5 (Toplamanın birleşme yasası). PA $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z) = (x + (y + z))$.

İspat: (Q3)'ün iki kez uygulanışı bize kaynak cümle “((x + y) + 0) = (x + (y + 0))”ı verir.

Tümevarım adımını elde etmek için şunu TV olarak alırız:

$$((x + y) + z) = (x + (y + z)).$$

Şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} ((x + y) + sz) &= s((x + y) + z) && \text{[(Q4) yoluyla]} \\ &= s(x + (y + z)) && \text{[TV yoluyla]} \\ &= (x + s(y + z)) && \text{[(Q4) yoluyla]} \\ &= (x + (y + sz)) && \text{[(Q4) yoluyla].} \boxtimes \end{aligned}$$

Önerme 6. PA $\vdash (\forall x)(0 \bullet x) = 0$.

İspat: “(0•0) = 0” kaynak cümlesi, (Q5)'den gelir. Tümevarım adımını elde etmek için şunu TV olarak alırız:

$$(0 \bullet x) = 0.$$

Şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} (0 \bullet sx) &= ((0 \bullet x) + 0) && \text{[(Q6) yoluyla]} \\ &= (0 \bullet x) && \text{[(Q4) yoluyla]} \\ &= 0 && \text{[TV yoluyla].} \boxtimes \end{aligned}$$

<u>Önerme (Proposition)</u> 7. PA $\vdash (\forall x)(\forall y)(sx \bullet y) = ((x \bullet y) + y)$.

İspat: Kaynak cümleyi aşağıdaki şekilde türetiriz:

$$\begin{aligned} (sx \bullet 0) &= 0 && \text{[(Q5) yoluyla]} \\ &= (x \bullet 0) && \text{[tekrar (Q5) yoluyla]} \\ &= ((x \bullet y) + 0) && \text{[(Q3) yoluyla].} \end{aligned}$$

TV olarak

$$(sx \bullet y) = ((x \bullet y) + y)$$

alınacak olursa şunu hesaplarız:

$$(sx \bullet sy) = ((sx \bullet y) + sx) \quad \text{[(Q6) yoluyla]}$$

$$= (((x \bullet y) + y) + sx) \quad \text{[TV yoluyla]}$$

$$= ((x \bullet y) + (y + sx)) \quad \text{[\underline{Önerme} 5 yoluyla]}$$

$$= ((x \bullet y) + s(y + x)) \quad \text{[(Q4) yoluyla]}$$

$$= ((x \bullet y) + s(x + y)) \quad \text{[\underline{Önerme (Proposition)} 4 yoluyla]}$$

$$= ((x \bullet y) + (x + sy)) \quad \text{[(Q4) yoluyla]}$$

$$= (((x \bullet y) + x) + sy) \quad \text{[\underline{Önerme (Proposition)} 5 yoluyla]}$$

$$= ((x \bullet sy) + sy) \quad \text{[(Q6) yoluyla].}\boxtimes$$

<u>Önerme (Proposition)</u> 8 <u>(Çarpmanın Yer Değiştirme Yasası)</u>. PA $\vdash (x \bullet y) = (y \bullet x)$.

İspat: "$(x \bullet 0) = (0 \bullet x)$" kaynak cümlesi, (Q5) ve Önerme 6'yı kullanır. Tümevarım varsayımı olarak şunu alırız:

$$(x \bullet y) = (y \bullet x).$$

Şunu hesaplarız:

$$(x \bullet sy) = ((x \bullet y) + x) \quad \text{[(Q6) yoluyla]}$$

$$= ((y \bullet x) + x) \quad \text{[TV yoluyla]}$$

$$= (sy \bullet x) \quad \text{[\underline{Önerme} 7 yoluyla].}\boxtimes$$

<u>Önerme (Proposition)</u> 9 <u>(Dağılma yasası)</u>. PA $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \bullet (y + z)) = ((x \bullet y) + (x \bullet z))$.

İspat: Buna denk olan şu tamdeyimi:

$$(\forall y)(\forall z)(\forall x)(x \bullet (y + z)) = ((x \bullet y) + (x \bullet z)),$$

Şu tümevarım aksiyomunu kullanmak suretiyle ispatlarız:

$(\forall y)(\forall z)[[(0\bullet(y + z)) = ((0\bullet y) + (0\bullet z)) \wedge (\forall x)((x\bullet(y + z)) = ((x\bullet y) + (x\bullet z)) \rightarrow (sx\bullet(y + z)) = ((sx\bullet y) + (sx\bullet z)))] \rightarrow (\forall x)(x\bullet(y + z)) = ((x\bullet y) + (x\bullet z))]$.

Kaynak cümleyi elde etmek için şunu hesaplarız:

$(0\bullet(y + z)) = 0$ [Önerme 6 yoluyla]

$= (0 + 0)$ [(Q3) yoluyla]

$= ((0\bullet y) + (0\bullet z))$ [tekrar Önerme 6 yoluyla].

Tümevarım adımını ispat ederken şunu TV olarak alırız:

$(x\bullet(y + z)) = ((x\bullet y) + (x\bullet z))$.

Sonra da şunu hesaplarız:

$(sx\bullet(y + z)) = ((x\bullet(y + z)) + (y + z))$ [Önerme 7 yoluyla]

$= (((x\bullet y) + (x\bullet z)) + (y + z))$ [TV yoluyla]

$= ((x\bullet y) + ((x\bullet z) + (y + z)))$ [Önerme 5 yoluyla]

$= ((x\bullet y) + (((x\bullet z) + y) + z))$ [Önerme 5 yoluyla]

$= ((x\bullet y) + ((y + (x\bullet z)) + z))$ [Önerme 4 yoluyla]

$= ((x\bullet y) + (y + ((x\bullet z) + z)))$ [Önerme 5 yoluyla]

$= (((x\bullet y) + y) + ((x\bullet z) + z))$ [Önerme 5 yoluyla]

$= ((sx\bullet y) + (sx\bullet z))$ [Önerme 7 yoluyla].⊠

Önerme 10 (Çarpmanın birleşme yasası). PA $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\bullet y)\bullet z) = (x\bullet(y\bullet z))$.

İspat: Kullanmak istediğimiz tümevarım aksiyomu şudur:

$$(\forall x)(\forall y)[[((x\bullet y)\bullet 0) = (x\bullet(y\bullet 0)) \wedge (\forall z)(((x\bullet y)\bullet z) = (x\bullet(y\bullet z)) \rightarrow ((x\bullet y)\bullet sz) = (x\bullet(y\bullet sz)))] \rightarrow (\forall z)((x\bullet y)\bullet z) = (x\bullet(y\bullet z))].$$

Kaynak cümleyi şöylece elde ederiz:

$$\begin{aligned} ((x\bullet y)\bullet 0) &= 0 && [(Q6)\text{ yoluyla}] \\ &= (x\bullet 0) && [(Q6)\text{ yoluyla}] \\ &= (x\bullet(y\bullet 0)) && [(Q6)\text{ yoluyla}]. \end{aligned}$$

Tümevarım adımını elde etmek için TV olarak şunu alırız:

$$((x\bullet y)\bullet z) = (x\bullet(y\bullet z)).$$

Şunu hesaplarız:

$$\begin{aligned} ((x\bullet y)\bullet sz) &= (((x\bullet y)\bullet z) + (x\bullet y)) && [(Q6)\text{ yoluyla}] \\ &= ((x\bullet(y\bullet z)) + (x\bullet y)) && [\text{TV yoluyla}] \\ &= (x\bullet((y\bullet z) + y)) && [\underline{\text{Önerme }}9\text{ yoluyla}] \\ &= (x\bullet(y\bullet sz)) && [(Q6)\text{ yoluyla}].\boxtimes \end{aligned}$$

Bu şekilde çok uzun bir süre devam edebiliriz.

Kullanıyor olduğumuz tümevarım aksiyom taslağına, onu aşağıdaki *güçlü tümevarım taslağı*ndan ayırt etmek için bazen “zayıf tümevarım taslağı” denir:

$$((\forall x)((\forall y < x)Sy \rightarrow Sx) \rightarrow (\forall x)Sx).$$

Bu taslağı uygularken tümevarım hipotezi olarak x’den küçük her sayının Sx tarafından temsil edilen özelliğe sahip olduğunu kabul eder, sonra da x’in bu özelliğe sahip olduğunu göstermeye çalışırız. Bunu başarırsak her sayının bu özelliğe sahip olduğuna hükmederiz. Güçlü tümevarım taslağının örneklemelerini ek aksiyomlar olarak kabul etmemiz gerekmez çünkü onları olağan tümevarım taslağını kullanarak türetebiliriz. Tam olarak kullandığımız tümevarım aksiyomuysa şudur:

$$[[(\forall y < 0)Sy \wedge (\forall x)((\forall y < x)Sy \rightarrow (\forall y < sx)Sy)] \rightarrow (\forall x)(\forall y < x)Sy].$$

“$(\forall y < 0)Sy$” tümevarım varsayımı, (Q9)'un bir sonucudur. (Q10) bize “$(\forall x)((\forall y < x)Sy \rightarrow (\forall y < sx)Sy)$” tümevarım cümlesinin şuna denk olduğunu söyler:

$$(\forall x)((\forall y < x)Sy \rightarrow (\forall y)((y < x \vee y = x) \rightarrow Sy)),$$

ki o da dolayısıyla şuna denktir:

$$(\forall x)((\forall y < x)Sy \rightarrow ((\forall y < x)Sy \wedge Sx)),$$

ki onun da denk olduğu şudur:

$(\forall x))((\forall y < x)Sy \rightarrow Sx)$'tir.

Böylelikle şuna sahibiz:

$$((\forall x)((\forall y < x)Sy \rightarrow Sx) \rightarrow (\forall x)(\forall y < x)Sy).$$

Ayrıca şuna da sahibiz:

$$((\forall x)(\forall y < x)Sy \rightarrow (\forall x)Sx),$$

ki aşağıdaki türetim vasıtasıyla şunu elde ederiz:

1	1. $(\forall x)(\forall y)(y < x \rightarrow Sy)$	PI
1	2. $(\forall y)(y < sa \rightarrow Sy)$	US, 1
1	3. $(a < sa \rightarrow Sa)$	US, 2
(Q10)	4. $(\forall x)(\forall y)(x < sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$	
(Q10)	5. $(\forall y)(a < sy \leftrightarrow (a < y \vee a = y))$	US, 4
(Q10)	6. $(a < sa \rightarrow (a < a \vee a = a))$	US, 5
	7. $a = a$	RI
(Q10)	8. $a < sa$	TC, 6, 7

1, (Q10)	9. Sa	TC, 3, 8
1, (Q10)	10. $(\forall x)Sx$	UG, 9
(Q10)	11. $((\forall x)(\forall y < x)Sy \rightarrow (\forall x)Sx)$	CP, 1, 10

Sonuçları birleştirerek şunu elde ederiz:

$$((\forall x)(\forall y < x)Sy \rightarrow Sx) \rightarrow (\forall x)Sx).$$

Şimdi yapmak istediğimiz şey, süreci tersine döndürmek ve güçlü tümevarım taslağını_seçmiş olsaydık, onu aksiyom olarak alıp zayıf tümevarım taslağını nasıl türetebilecek olduğumuzu göstermektir. Ancak bunu yapmaya giriştiğimizde küçük bir hatayla karşılaşırız. Her sayı ya 0'dır ya da bir ardıldır ifadesine karşılık gelen Önerme 1'i türetmek için zayıf_tümevarımı kullandık. Zayıf yerine güçlü tümevarımı koyarsak Önerme 1'i türetemeyiz. Doğrusu, içinde Önerme 1'in yanlış olduğu, Q + güçlü tümevarım taslağının bir modelini oluşturmak mümkündür (her ne kadar bunu burada yapmayacak olsak da). Buna rağmen hala gösterebilir olduğumuz şey, Q + Önerme 1 + güçlü tümevarım taslağının zayıf tümevarım taslağını gerektirdiğidir. Dolayısıyla, göstermek istediğimiz şey şudur:

$$((R0 \wedge (\forall x)(Rx \rightarrow Rsx)) \rightarrow (\forall x)Rx).$$

Güçlü tümevarım bize şunu verir:

$$((\forall x)((\forall y < x)Ry \rightarrow Rx) \rightarrow (\forall x)Rx).$$

Bunun üzerine göstermemiz gereken şey şudur:

$$((R0 \wedge (\forall x)(Rx \rightarrow Rsx)) \rightarrow (\forall x)((\forall y < x)Ry \rightarrow Rx)).$$

Varsayılır ki

$$R0$$

ve

$$(\forall x)(Rx \rightarrow Rsx)$$

Herhangi bir y alınır. Göstermek istediğimiz şey şudur:

$$((\forall y < x)Ry \rightarrow Rx).$$

x = 0 ise doğrudan doğruya varsayımımızdan R0 sonucu çıkar. Bundan dolayı (Önerme 1'i kullanarak) x'i bir ardıl sayabiliriz; diyelim ki x = sz. Bu durumda göstermek zorunda olduğumuz şey şudur:

$$((\forall y < sz)Ry \rightarrow Rsz).$$

$(\forall x)(Rx \rightarrow Rsx)$'i varsaydık, ki o da bize şunu verir:

$$(Rz \rightarrow Rsz).$$

Bu takdirde bize gereken şudur:

$$((\forall y < sz)Ry \rightarrow Rz).$$

Başka bir deyişle,

(†) $$((\forall y)(y < sz \rightarrow Ry) \rightarrow Rz).$$

Şuna sahibiz:

$$((\forall y)(y < sz \rightarrow Ry) \rightarrow (z < sz \rightarrow Rz)).$$

"z < sz", (Q11)'in bir sonucu olduğu için (†) sonucu doğrudan doğruya çıkar.

Güçlü tümevarım taslağında "Sx"in yerine "~Qx" yerleştirilir, ve aşağıdakine mantıki olarak denk olan bir taslak elde edilir:

$$((\exists x)Qx \sim (\exists x)(Qx \land (\forall y <) \sim Qy)).$$

Bu taslak, *iyi sıralama ilkesi*nin formelleştirilmiş bir örneğidir: Boş kümeden farklı her bir doğal sayı yığını, bir en küçük öğeye sahiptir.

Tümevarım aksiyom taslağı, şunun formelleştirilmiş halidir:

> **Matematiksel Tümevarım İlkesi**. 0'ı barındıran ve barındırdığı her doğal sayının ardılını da barındıran her yığın, bütün doğal sayıları içerir.

Bu ilke, doğal sayılarla ilgili akıl yürütmelerimizde merkezi konumdadır. Bu merkeziyetin bir nedeni aşağıdakinde belirlenir:

> **Teorem** (Richard Dedekind). Her ikisi de matematiksel tümevarım ilkesini sağlayan Q'nun herhangi iki modeli eşyapılıdır.[2]

2

Aritmetik dilinin bir $\mathfrak{A}$ modelinden bir $\mathfrak{B}$ modeline bir *eşyapılılık*, aşağıdaki koşulları sağlayan $|\mathfrak{A}|$'dan $|\mathfrak{B}|$'ye f gibi birebir ve örten bir fonksiyonudur:

$f(0^{\mathfrak{A}}) = 0^{\mathfrak{B}}$.

$f(s^{\mathfrak{A}}(x)) = s^{\mathfrak{B}}(f(x))$.

$f(x +^{\mathfrak{A}} y) = f(x) +^{\mathfrak{B}} f(y)$.

$f(x \bullet^{\mathfrak{A}} y) = f(x) \bullet^{\mathfrak{B}} f(y)$.

$f(x\ E^{\mathfrak{A}}\ y) = f(x)\ E^{\mathfrak{B}}\ f(y)$.

$f(x) <^{\mathfrak{B}} f(y)$ ise, ve ancak böyleyse, $x <^{\mathfrak{A}} y$.

σ, $\mathfrak{A}$ için bir değişken ataması olduğunda, herhangi bir ϕ formülü için, $f\circ\sigma$, ϕ'yi $\mathfrak{B}$ içinde sağlıyor ise, ve ancak böyleyse, σ, ϕ'yi $\mathfrak{A}$ içinde sağlar. ($f\circ\sigma$, $f\circ\sigma(v)$'yi $f(\sigma(v))$'ye eşit olarak belirlemek suretiyle tanımlanır.) Bundan aynı cümlelerin $\mathfrak{A}$'da ve $\mathfrak{B}$'de doğru oldukları sonucu çıkar.

İspat: f, $|\mathfrak{A}|\times|\mathfrak{B}|$'nin şu koşulları sağlayan en küçük altyığını olsun:

(D1) $<0^{\mathfrak{A}},0^{\mathfrak{B}}>$ bu yığına aittir.

(D2) $<x,y>$ yığına aitse $<s^{\mathfrak{A}}(x),s^{\mathfrak{B}}(y)>$ de yığına aittir.

Yani, f, (D1) ve (D2)'yi sağlayan $|\mathfrak{A}|\times|\mathfrak{B}|$'nin bütün altyığınlarının kesişimidir.

f, $|\mathfrak{A}|$'dan $|\mathfrak{B}|$'ye bir fonksiyondur. Bunu görmek için öncelikle f'nin $0^{\mathfrak{A}}$'yu $|\mathfrak{B}|$'nin bir ve yalnızca bir elemanıyla eşleştirdiğini dikkate alınız: (D1) yoluyla $<0^{\mathfrak{A}},0^{\mathfrak{B}}> \in f$. $y \neq 0^{\mathfrak{B}}$ ise $f \sim \{<0^{\mathfrak{A}},y>\}$, (D1) ve (D2)'yi sağlar, ki bu da f en küçük olduğu için $f \sim \{<0^{\mathfrak{A}},y>\} = f$ ve $<0^{\mathfrak{A}},y> \notin f$ olduğunu ifade eder.

Sonra, varsayalım ki f, x'i $|\mathfrak{B}|$'nin bir ve yalnızca bir y elemanıyla eşleştirsin. f, (D2)'yi sağladığı için $<s^{\mathfrak{A}}(x),s^{\mathfrak{B}}(y)>$ ikilisi f'ye aittir. Şimdi $z \neq s^{\mathfrak{B}}(y)$. $g = f \sim \{<s^{\mathfrak{A}}(x),z>\}$ olsun. $\mathfrak{A}$, (Q1)'i sağladığı için $s^{\mathfrak{A}}(x) \neq 0^{\mathfrak{A}}$ olur ve bu nedenle g, (D1)'i sağlar. g'nin (D2)'yi de sağladığını görmek için $<a,b> \in$ g'yi kabul ediniz. $s^{\mathfrak{A}}(a) \neq s^{\mathfrak{A}}(x)$ ise $<s^{\mathfrak{A}}(a),s^{\mathfrak{B}}(b)>$, g'ye ait olacaktır çünkü o, f'ye aittir. $s^{\mathfrak{A}}(a) = s^{\mathfrak{A}}(x)$ ise $\mathfrak{A}$, (Q2)'yi sağladığı için $a = x$ olur. f, x'i $|\mathfrak{A}|$'nun bir ve yalnızca bir elemanıyla eşleştirdiği için b, y'ye eşit olmak zorundadır, ve bu nedenle $s^{\mathfrak{B}}(b) \neq z$ olur; bu yüzden yine, $<s^{\mathfrak{A}}(a),s^{\mathfrak{B}}(b)>$, g'ye aittir. Böylelikle g, (D1) ve (D2)'yi sağlar. f, (D1) ve (D2)'yi sağlayan en küçük sınıf olduğu için g, f'ye eşit olmak zorundadır, ki bu da $<s^{\mathfrak{A}}(x),z>$, f'ye ait değildir anlamına gelir. Sonuç olarak f, $s^{\mathfrak{A}}(x)$'i $s^{\mathfrak{B}}(y)$ ile eşleştirir ve başka hiçbir şeyle eşleştirmez.

C, f tarafından $|\mathfrak{A}|$'nun tam olarak bir öğesiyle eşleştirilmiş $|\mathfrak{A}|$ öğelerinin kümesi olsun. $0^{\mathfrak{A}}$'nun C'ye ait olduğunu ve her ne zaman x, C'ye aitse $s^{\mathfrak{A}}(x)$'in de C'ye ait olduğunu görürüz. $\mathfrak{A}$, matematiksel tümevarım ilkesini sağladığı için C, $|\mathfrak{A}|$'ya eşit olmak zorundadır, ki bu da f, $|\mathfrak{A}|$'dan $|\mathfrak{B}|$'ye bir fonksiyondur anlamına gelir.

Benzer bir çıkarım—bu sefer $\mathfrak{B}$'nin matematiksel tümevarım ilkesini sağlıyor oluşunu kullanarak—f'nin birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterir.

f'nin bir eşyapılılık olduğunun ispatını tamamlamak için göstermemiz gereken birkaç şey var. $f(0^{\mathfrak{A}}) = 0^{\mathfrak{B}}$'yi göstermemiz gerekiyor; bu, doğrudan doğruya f'nin tanımlanma biçiminden çıkar. Dildeki her bir fonksiyon işareti için f'nin fonksiyon işaretinin işleyişine_ riayet ettiğini, örneğin, $f(x +^{\mathfrak{A}} y) = f(x) +^{\mathfrak{B}} f(y)$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Son olarak, f'de "$<$" bağıntısının korunduğunu, yani, $x <^{\mathfrak{A}} y$'nin $f(x) <^{\mathfrak{B}} f(y)$ ile denk olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bunlardan yalnızca "s" ve "+" için olan ispatları yazacağız.

(D1) bize $<x,y> \in f$ ise $<s^{\mathfrak{A}}(x),s^{\mathfrak{B}}(y)> \in f$ olduğunu söyler. Bundan dolayı $x \in |\mathfrak{A}|$ için, $<s,f(x)> \in f$ olduğundan $<s^{\mathfrak{A}}(x),s^{\mathfrak{B}}(f(x))> \in f$'dir, yani, $f(s^{\mathfrak{A}}(x)) = s^{\mathfrak{B}}(f(x))$ olur.

"+" için olan maddeyi elde etmek için $x \in |\mathfrak{A}|$'yu seçiniz. $E = \{y \in |\mathfrak{A}|: f(x +^{\mathfrak{A}} y) = f(x) +^{\mathfrak{B}} f(y)\}$ olsun. $0^{\mathfrak{A}}$'nun E'ye ait olduğunu ve ayrıca, y, E'ye aitse $s^{\mathfrak{A}}(y)$'nin de ait olduğunu göstermek istiyoruz. $\mathfrak{A}$, matematiksel tümevarım ilkesini sağladığı için bu, $|\mathfrak{A}|$'nun her üyesinin E'ye ait olduğunu göstermeye yeterli olacaktır.

$\mathfrak{A}$, (Q3)'ü sağladığı için $x +^{\mathfrak{A}} 0^{\mathfrak{A}} = x$. $\mathfrak{B}$, (Q3)'ü sağladığı için $f(x) +^{\mathfrak{B}} 0^{\mathfrak{B}} = f(x)$. Dolayısıyla $f(x +^{\mathfrak{A}} 0^{\mathfrak{A}}) = f(x) = f(x) +^{\mathfrak{B}} 0^{\mathfrak{B}} = f(x) +^{\mathfrak{B}} f(0^{\mathfrak{A}})$ ve $0^{\mathfrak{A}}$, E'ye aittir.

Diyelim ki y, E'ye aittir. Şunu hesaplarız

$$\begin{aligned}
f(x +^{\mathfrak{A}} s^{\mathfrak{A}}(y)) &= f(s^{\mathfrak{A}}(x +^{\mathfrak{A}} y)) && \text{[çünkü } \mathfrak{A}\text{, (Q4)'ü sağlar]}\\
&= s^{\mathfrak{B}}(f(x +^{\mathfrak{A}} y)) && \text{[çünkü f, "s"ye riayet eder]}\\
&= s^{\mathfrak{B}}(f(x) +^{\mathfrak{B}} f(y)) && \text{[çünkü } y \in E\text{]}\\
&= f(x) +^{\mathfrak{B}} s^{\mathfrak{B}}(f(y)) && \text{[çünkü } \mathfrak{A}\text{, (Q4)'ü sağlar]}\\
&= f(x) +^{\mathfrak{B}} f(s^{\mathfrak{A}}(y)) && \text{[çünkü f, "s"ye riayet eder].}
\end{aligned}$$

Bu yüzden $s^{\mathfrak{A}}(y)$, E'ye aittir.⊠

Şimdi bir sorunumuz var. Dedekind'in teoremi bize matematiksel tümevarım ilkesini_ sağlayan Q'nun herhangi bir modelinin standart model ile eşyapılı olduğunu söyler. Bilhassa, doğru aritmetik, Q'yu kapsadığından ve ayrıca tümevarım aksiyom taslağının bütün __örneklemelerini de kapsadığından doğru aritmetiğin bütün modelleri standart model ile eşyapılı olmalıdır. Fakat değildirler. Sıkılık Teoremi bize doğru aritmetiğin standart olmayan, yani, standart model ile eşyapılı olmayan modelleri olduğunu söyler.

Bu sorunun çözümü, tümevarım aksiyom taslağının matematiksel tümevarım ilkesinin içeriğini ifade etmeyi tam olarak başaramadığının farkına varmaktır. Tümevarım aksiyom taslağının bize söylediği şey, matematiksel tümevarım ilkesinin dilin birtakım yüklemleri vasıtasıyla adlandırılan her yığın tarafından sağlandığıdır.[3] Taslağın bize dilin yüklemleri tarafından adlandırılmayan yığınlardan bahsedebilmesinin hiçbir

3

Meseleyi biraz daha açık olarak ifade etmek uğruna $\mathfrak{A}$, aritmetik dilinin bir modeli olsun. Aritmetik dilini, $\mathfrak{A}$ evreninin her bir öğesinin standart bir ismi olma işlevini gören yeni bir sabit eklemek suretiyle genişletiniz. $\mathfrak{A}$, bütün tümevarım aksiyomlarını sağlıyor ise matematiksel tümevarım ilkesinin, genişletilmiş dilin birtakım yüklemlerinin genişletimi olan her $|\mathfrak{A}|$ altyığını için geçerli olduğundan emin oluruz. Slogan şudur: söz konusu ilke, $\mathfrak{A}$ içinde birtakım "parametreli yüklemler" tarafından adlandırılan yığınlar için geçerlidir.

yolu yoktur. Dedekind'in teoreminin ispatında yer alan yığınlar—f fonksiyonunun tanım kümesi, ve benzeri— dilin yüklemleri tarafından adlandırılmazlar.

Matematiksel tümevarım ilkesinin tam gücünün farkına varmak için alışıldık aritmetik dilinin ötesine, *ikinci düzey* aritmetik diline geçmemiz gerekir. Bu yeni dilde, aritmetik dilinin bildik sembollerine ek olarak "X_0", "X_1", "X_2","X_3", ve benzeri gibi ikinci düzey değişkenler_yer alır.[4] "Tamdeyim" tanımı iki şekilde değişir: Herhangi bir τ terimi için $X_m\tau$, bir bölümsüz tamdeyimdir. Ayrıca, ϕ bir tamdeyim ise $(\exists X_m)\phi$ ve $(\forall X_m)\phi$ de öyledir. İkinci_düzey değişkenlerin "bağsız" ve "bağlı" geçişleri arasındaki ayrım, ve cümlelerle öteki tamdeyimler arasındaki ayrım, aynen birinci düzey dildeki gibi işler.

"Model" tanımı değişmez ama anlamdiziminde küçük değişiklikler vardır. Bir $\mathfrak{A}$ modeli için bir değişken ataması, her bir sıradan değişkene (ya da bu bağlamda adlandırıldıkları üzere her bir *birey değişkenine*) $|\mathfrak{A}|$'nun bir öğesini ve her bir ikinci düzey değişkene, $|\mathfrak{A}|$'nun bir altkümesini atar. τ'nun σ'ya göre gönderimde bulunduğu

4

İkinci düzey değişkenlerin birli yüklemlerin yerini almasına izin veriyoruz. İsteseydik ikinci derece değişkenlerin birden çok işlenikli yüklemlerin yerini almasına da izin verebilirdik. Burada yapıyor olduğumuz şey düşünüldüğünde bu herhangi bir fark yaratmayacaktır, çünkü doğal sayılar üzerine ikili bağıntılar hakkında söylemek istediğimiz şeyleri, doğal sayıların özellikleri hakkındaki ifadelere çevirmek için İkili fonksiyonunu kullanabiliriz.

birey, $\sigma(X_m)$'nin bir öğesi ise, ve ancak böyleyse, σ, $X_m\tau$'yu gerçekler. Bir σ değişken atamasının X_m-değişkesi, σ ile, muhtemelen X_m'ye atadığı şey dışında bağdaşır. σ'nın bazı X_m-değişkeleri (X_m-variant) ϕ'yi $\mathfrak{A}$ içinde gerçekliyor ise, ve ancak böyleyse, σ, $(\exists X_m)\phi$'yi $\mathfrak{A}$ içinde gerçekler. σ'nın her X_m-değişkesi (X_m-variant) ϕ'yi $\mathfrak{A}$ içinde gerçekliyor ise, ve ancak böyleyse, σ, $(\forall X_m)\phi$'yi $\mathfrak{A}$ içinde gerçekler.

İkinci düzey PA, aşağıdaki *ikinci derece tümevarım aksiyomu*yla birlikte (Q1)'den (Q11)'e kadarki aksiyomlardan meydana gelir:

$$(\forall X_0)((X_0 0 \wedge (\forall y)(X_0 y \rightarrow X_0 sy)) \rightarrow (\forall y)X_0 y).$$

Böylelikle ikinci düzey PA'yı ikinci düzey aritmetik dilinin tek bir cümlesi gibi yazabiliriz.

İkinci düzey değişkenler, yalnızca şu veya bu formülle adlandırılan altyığınlar üzerine değil konuşma evreninin bütün altyığınları üzerinde dolaştıkları için ikinci düzey tümevarım aksiyomu, matematiksel tümevarım ilkesinin tam gücünü ifade eder. Dedekind'in teoremi aşağıdakiyle aynı anlama gelir:

> **Sonuç.** İkinci düzey PA *koşulsuzdur*; yani, teorinin herhangi iki modeli eşyapılıdır.