İspatların Kodlanması

Şimdi yapmak istediğimiz şey, ispatları alıp nasıl kodlayacağımızı görmek. Ayrıntıların anlaşılması güçtür ama fikir basittir. Bir ispat bir ifadeler dizisidir ve halihazırda ifadelerin sayılar şeklinde nasıl kodlanacağını ve bir sayılar dizisinin tek bir sayı şeklinde nasıl kodlanacağını biliyoruz.

Birkaç teknik nokta dikkat gerektiriyor. Mantık I'de öğrendiğimiz mantıki sistem, sonsuz sayıda sabit için sonsuz bir hazne gerektiriyordu. Sabitlere gereksinim duymayan bir kurallar sistemi sunmak zor değildir; ama ilave sabitler barındırması için Gödel numaralandırması sistemimizi genişletmek daha da kolaydır. $\mathscr{L}$ aritmetik dili olmak kaydıyla, $\mathscr{L}_c$, $\mathscr{L}$'ye sonsuzca çok sayıda yeni $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ birey sabitleri eklenerek elde edilen dil olsun. Gödel numaralandırması sistemimizi, $\ulcorner c_n \urcorner$'nin İkili(3,n) olmasına izin vererek genişletebiliriz. İşte bundan dolayı, $\mathscr{L}$ için önceki Gödel numaralandırmamızı verirken 3 ile başlayan ikili ve üçlüleri atladık; yeni sabitler için yer bırakıyorduk.

Mantık I'deki tümdengelimli dizgemiz, basit bir takım kuralların yanısıra, öncül kümesi olarak önceki satırların öncül kümelerinin birleşimini alan, ya bir totoloji olan ya da totolojik bir sonuç olan herhangi bir cümleyi yazmanıza izin veren gayet karmaşık bir kuralı, Totolojik Sonuç (TS) kuralını içeriyordu. TS, o kadar karmaşıktır ki onun işleyişini aritmetik olarak tanımlamak çok zahmetli olurdu. Bunu yapmak yerine TS'yi daha basit bir takım kurallarla ikame edebiliriz. Bunu yapmak için birçok yöntem vardır. Bilhassa basit olan ve Mantık I'de öğrendiğimiz kurallar sistemine sorunsuz bir şekilde uyan bir yöntem, TS kuralını üç yeni kuralla ikame etmek şeklindedir:

Modus Ponens: Γ öncül kümesiyle ϕ'yi türetmişseniz ve Δ öncül kümesiyle $(\phi \rightarrow \psi)$'yi türetmişseniz $\Gamma \cup \Delta$ öncül kümesiyle ψ 'yi yazabilirsiniz.

Modus Tollens: Γ öncül kümesiyle ϕ'yi türetmişseniz ve Δ öncül kümesiyle $(\sim\psi \rightarrow \sim\phi)$'yi türetmişseniz $\Gamma \cup \Delta$ öncül kümesiyle ψ 'yi yazabilirsiniz.

Tanım Değiş Tokuşu: Aynı öncül kümesini muhafaza ederek $(\phi \vee \psi)$'yi $(\neg\phi \rightarrow \psi)$ ile ikame edebilirsiniz ve tersi de doğrudur. Aynı şekilde $(\phi \wedge \psi)$ ve $\neg(\phi \rightarrow \psi)$ için; ve $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ve $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$ için.

Bu yeni kuralların TS için tatmin edici bir ikame olduğunun ispatı için Benson Mates, *Elementary Logic* (New York: Oxford University Press, 1972)'ye bakınız. Mates'in sisteminin Mantık I'deki kurallarla güzel bir şekilde kaynaşması şaşırtıcı değildir çünkü Mantık I'deki kurallar onun kitabından alındı.

s aşağıdaki özelliklere sahip <x,y> sıralı ikililerinin bir dizisi ise, ϕ'nin $\mathscr{L}$'nin bir cümlesi ve Γ'nın $\mathscr{L}$'nin bir Δ cümleler kümesi[1] olduğu yerde bir s sayısının, ϕ'nin Γ'dan bir *ispat*ı olduğu söylenir:

x, $\mathscr{L}_c$'nin sonlu bir Ω cümleler kümesinin bir kodudur.

y, $\mathscr{L}_c$'nin bir ψ cümlesinin kodudur.

Ya ψ, Ω'nın bir öğesidir (ki böylece ψ, Ω'dan PI kuralıyla türetilebilir) ya da ψ, Ω öncül kümesiyle s'nin önceki üyelerinin bir veya daha fazlasından PI haricindeki kurallardan bir tanesiyle türetilebilir.

s'nin son üyesi, $\ulcorner\phi\urcorner$'ye ikinci bileşeni olarak ve Γ'nın bir altkümesinin koduna da ilk bileşeni olarak sahiptir.

Bunu ayrıntılı olarak açıklamak için bir satırın önceki bir satırdan bir kuralla türetilmesinin ne anlama geldiğini kural kural belirtmek zorunda olacaktık. Örneğin, y =

1

Bu aslında Δ'nın, Γ'nın üyelerinin kod sayılarının kümesi olduğu anlamına gelir. İleride sıkça bir cümle veya cümleler kümesi ile onun kod sayısı arasındaki ayrımı sileceğiz. Umarım herhangi bir kafa karışıklığı doğmaz.

Üçlü(13,v,w) eşitliğini sağlayan bir $v < y$ varsa ve herhangi bir $u < s$ için, ($u \in x$ veya $u = v$) olduğunda ve ancak böyle olduğunda $u \in z$ oluyorsa, ve ancak böyleyse, <x,y>, <z,w>'den CP kuralıyla türetilir. Ayrıntıları incelemek sabır ve dayanma erdemlerini telkin etmeye yardımcı olur, ama herhangi bir düşünsel erdemi esinlemeyeceği için bunu burada yapmayacağız.

Elde ettiğimiz şey, $\{\langle s, \ulcorner\phi\urcorner\rangle$: s, ϕ'nin Γ'dan bir ispatının kodudur}[2] bağıntısını Q içinde, ve dolayısıyla Q'yü içeren herhangi bir tutarlı kuram içinde, güçlü bir şekilde temsil eden bir $\sum$ formülü olan B_Γ'dır. Bir $\sum$ formülü olarak Bew_Γ'yi ("ispat" anlamına gelen Almanca "Beweis," kelimesinden):

$$Bew_\Gamma(x) =_{Def} (\exists s)s\ B_\Gamma\ x$$

şeklinde tanımlarsak {x: x, Γ'nın bir sonucunun kodudur}'u Q içinde ve Q'yü içeren başka herhangi bir ω-tutarlı kuram içinde zayıf bir şekilde temsil eden bir formül elde ederiz.

"Bew_Γ,"ü tanımlarken Γ'nın bir Δ aksiyomlar sistemi olduğunu varsaymıştık. Bu gereksiz bir şekilde kısıtlayıcı görünüyor. Bir aksiyomlar kümesinin sonuçlar kümesi için bir ispat yöntemi, aksiyomlar kümesi için bir ispat yöntemi elde etmekle kazanılabilir; bir karar yöntemine ihtiyaç duymayız. Sonuçları oluşturmak için, aksiyomları güvenilir bir şekilde ayırt edebilmemiz gerekir; aksiyom olmayanları ayırt edebilmek zorunda değiliz. Böylece, görünüşe bakılacak olsaydı, bir Δ kümesinden ziyade bir $\sum$ aksiyomlar kümesiyle

---

2

Γ içinde ispatları güçlü bir şekilde temsil eden formülü yazarken Γ'nın aksiyomlar kümesini güçlü bir şekilde temsil eden, $\gamma(x)$ şeklindeki birtakım $\sum$ formülleri kullanacağız. Γ'yı güçlü bir şekilde temsil etmek için kullanabileceğimiz birçok farklı $\sum$ formülleri vardır ve her bir seçim, bize Γ-içinde-ispat bağıntısını temsil etmek için farklı bir formül verecektir. Mantığın bazı ücra köşelerinde bu bir fark yaratır ama burada bizim için önemli olmayacak. Bütünüyle açık olmak adına "B_Γ,"den ziyade "$B_{\gamma(x)}$," yazmalıyız ama bu hafif belirsiz gösterimin bize herhangi bir zararı dokunmayacak.

başlamamıza izin vermiş olan daha serbest bir ispatlanabilirlik kavramını benimsemenin faydasını görecektik. Aşağıdaki teoremden dolayı bu görünüşün yanıltıcı olduğu ortaya çıkar:

> **Craig'in Teoremi.** Γ, bir $\sum$ cümleler kümesi olsun. Bu durumda Γ'yla aynı sonuçlara sahip olan bir Δ cümleler kümesi vardır.

İspat: Γ boş kümeyse zaten Δ'dır ve işimiz biter. Γ boş değilse bir Δ tam fonksiyonunun değer kümesidir; buna f diyelim. Ω = {Üçlü(15,n,f(n)): n bir doğal sayıdır} olsun.

Ω, Δ'dır. Bu açıkça $\sum$'dur. Bunun Π olduğunu görmek için, tümleyeninin {z: 1inci2(z) $\neq$ 15 veya 3üncü3(z) $\neq$ f(2nci3(z))} olduğunu dikkate alınız.

Ω'nın üyelerinin hepsi, başlarına boş bir tümel niceleyici ekleyerek Γ'nın üyelerinden elde edilir. Γ'nın üyeleri, başta geçen boş bir tümel niceleyiciyi silmek suretiyle Ω'nın üyelerinden elde edilir. Dolayısıyla Γ ve Ω mantıki olarak eşittirler.⊠