Robinson Aritmetiği

Bir S kümesinin Σ olmasının, etkin olarak sayılabilir olmasının ve S için bir ispat yöntemi bulunmasının birbirine denk oldukları fikrini geliştiriyoruz. Şimdi "ispat yöntemi" kavramını ilk anlamıyla ele alabileceğimizi, yani bir ispat yöntemini belirli bir aksiyomlar sistemi içinde yürütülen bir türetim olarak değerlendirebileceğimizi görmek istiyoruz. Bu yüzden şimdi aksiyomlar sistemlerine bakmamız gerekiyor.

Tanım. *Robinson aritmetiği* olarak da bilinen *Q*, aşağıdaki aksiyomların birletimidir:

(Q1) $(\forall x)\sim x = 0$

(Q2) $(\forall x)(\forall y)(sx = sy \rightarrow x = y)$

(Q3) $(\forall x)((x + 0) = x$

(Q4) $(\forall x)(\forall y)(x + sy) = s(x + y)$

(Q5) $(\forall x)(x \bullet 0)= 0$

(Q6) $(\forall x)(\forall y)(x \bullet sy) = ((x \bullet y) + x)$

(Q7) $(\forall x)(xE0) = s0$

(Q8) $(\forall x)(\forall y)(xEsy) = ((xEy) \bullet x)$

(Q9) $(\forall x)\sim x < 0$

(Q10) $(\forall x)(\forall y)(x < sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$

(Q11) $(\forall x)(\forall y)(x < y \vee (x = y \vee y < x))$

Doğal sayıların izahatı olarak alınırsa, Q acınacak derecede yetersizdir. Toplama ve çarpmanın yer değiştirme kanunları gibi en basit genellemeler dahi Q içinde türetilemezdir. Yine de şu elimizdedir:

Teorem. Her bir doğru Σ cümlesi Q içinde türetilebilirdir.

Q'nun göz atmaya değer oluşunun nedeni bu teoremdir. Q, bizatihi ilgi çekici değildir. Onu ortaya atmamızın nedeni, içinde her bir doğru Σ cümlesinin ispat edilebilir olduğu tek-aksiyomlu bir kuram olmasıdır.

İspat: Öncelikle her bir m ve n için,

$$0 = [0]$$

$$s[m] = [sm]$$

$$([m] + [n]) = [m+n]$$

$$([m] \bullet [n]) = [m \bullet n]$$

$$([m]E[n]) = [mEn]$$

eşitliklerinin hepsinin Q'nun sonuçları olduğunu dikkate alınız. Daha sonra terimlerin karmaşıklığı üzerine basit bir tümevarımla şunu ispatlamamızı mümkün kılar: her bir τ kapalı terimi için, öyle bir n sayısı vardır ki

$$\tau = [n]$$

cümlesi Q'nün bir sonucudur. Bir tümevarım, her bir m sayısının şu özelliğe sahip olduğunu gösterir:[1]

$$(\forall n)(m \neq n \rightarrow Q \vdash \sim [m] = [n]$$

1

"$\Gamma \vdash \phi$"demek ϕ, Γ'nın bir sonucu demektir.

Benzer bir tümevarım da her bir n sayısı için şuna sahip olduğumuzu gösterir:

Her bir m için, eğer $m < n$ ise $[m] < [n]$, Q içinde ispat edilebilirdir iken $m \geq n$ ise $[m] < [n]$, Q içinde çürütülebilirdir[2].

Böylelikle görüyoruz ki her bölümsüz cümle Q içinde karar verilebilirdir[3]. Bundan hemen şu sonuç çıkar ki niceleyicisiz her cümle Q içinde karar verilebilirdir.

$$Q \vdash (\forall x)\neg x < 0$$

ve her bir n için

$$Q \vdash (\forall x)(x < [n+1] \leftrightarrow (x = [0] \vee x = [1] \vee \ldots \vee x = [n]))$$

olduğundan, her bağlı tamdeyim, ispat kuramı bakımından niceleyicisiz bir tamdeyime denktir. Bağlı niceleyicileri, daha önce yaptığımız gibi dışarıdan içeriye doğru eleriz.

Şimdi görüyoruz ki her bağlı cümle Q içinde karar verilebilirdir, ve hatta Q doğru olduğu için her doğru bağlı cümle Q içinde ispat edilebilirdir. Sonuç olarak her doğru Σ cümlesi bir delil sağlamak suretiyle ispat edilebilir.⊠

Sonuç. Γ, Q'yü kapsayan[4] doğru bir kuram olsun. Bu durumda S gibi her bir Σ kümesi[5] için, S'yi Γ içinde zayıf bir şekilde temsil eden bir Σ tamdeyimi vardır.

2

Bir cümlenin değillemesi Q içinde ispat edilebilirdir ise, ve ancak böyleyse, o cümlenin kendisi Q içinde çürütülebilirdir.

3

Bir cümle, Q içinde ya ispat edilebilir ya da çürütülebilir ise, ve ancak böyleyse, Q içinde karar verilebilirdir.

İspat: S, Σ tamdeyimi olan ϕ'nin kaplamı olsun. n, S'ye aitse ϕ([n]), Q'nün bir sonucudur ve bu nedenle de Γ'nın bir sonucudur. n ∉ S ise ϕ([n]) doğru değildir ve bu nedenle de Γ'nın bir sonucu değildir.⊠

Yeni bir kavrama başvurarak bu sonucu güçlendirebiliriz:

> **Tanım.** Bir Γ kuramı, bazı ψ(x) formülleri için, (∃x)ψ(x)'i ispatlıyor ama aynı zamanda her bir n için ¬ψ([n])'yi de ispatlıyor ise, ve ancak böyleyse, ω-*tutarsız*dır.

Tutarsız bir kuram her cümleyi ispatladığı için, her tutarsız kuram ω-tutarsızdır, ama daha sonra göreceğimiz gibi her ω-tutarsız kuram, tutarsız değildir. Her doğru kuram ω-tutarlıdır ama her ω-tutarlı kuram doğru değildir.

Sonuç. Γ, Q'yü içeren[6] ω-tutarlı bir kuram olsun. Bu durumda S gibi her bir Σ kümesi için S'yi Γ içinde zayıf bir şekilde temsil eden bir Σ tamdeyimi vardır.

4

Standart kullanımda Γ, Q'yü *kapsar* demek için Q'nün Γ'nın öğesi olması düz anlamıyla gerekmez. Q'nün Γ'nın bir sonucu olması yeterlidir. Problem şudur ki standart kullanımda "kuram"ın, bir aksiyomlar kümesine mi yoksa aksiyomlar kümesinin sonuçlarının kümesine mi gönderimde bulunduğu belirsizdir. Bu belirsiz kullanım iyice kemikleşmiştir; bu yüzden buna dayanmak zorundayız.

5

Her zaman olduğu gibi kümeler hakkında söylediklerimiz bağıntılar için de geçerlidir.

6

İspat: S, ψ'nin bağlı olduğu durumda $(\exists y)\psi(x,y)$'nin kaplamı olsun. n, S'ye aitse $\Gamma \vdash (\exists y)\psi([n],y)$ çıkarımı yukarıdakiyle aynıdır. n, S'ye ait değilse her bir m için $\psi([n],[m])$ yanlıştır ve bu nedenle $\neg\psi([n],[m])$, Q'nün bir sonucu, dolayısıyla da Γ'nın bir sonucudur. ω-tutarlılığından şu sonuç çıkar ki $(\exists y)\psi([n],y)$, Γ'nın bir sonucu değildir.$\boxtimes$

Bu sonucu, "ω-tutarlı" yerine "tutarlı"yı koyarak daha da güçlendiremeyiz, çünkü içinde her Σ kümesinin zayıf bir şekilde temsil edilebilir olmadığı ve Q'yü içeren tutarlı bir kuram bulmak mümkündür. İspat, Σ olan ama Δ olmayan bir K kümesi ile başlayarak ve tek bağsız değişkenli bütün tamdeyimleri sıralayarak ilerler. Γ kuramımızı, Q ile başlayıp ve n-inci aşamada kurama n-inci tamdeyimin K'yi zayıf bir şekilde temsil etme ihtimalini öldüren bir cümle ekleyip her zaman tutarlılığı muhafaza ederek kademeli bir şekilde kurarız. Ayrıntılara girmeyeceğim.[7]

Standart kullanımda Γ, Q'yü *içerir* demek için Q'nün Γ'nın bir elemanı olması asıl itibariyle gerekmez. Q'nün Γ'nın bir sonucu olması yeterlidir. Problem şudur ki standart kullanımda "teori", bir aksiyomlar kümesi ve aksiyomlar kümesinin sonuçlarının kümesi arasında belirsizdir. Bu belirsiz kullanım iyice kemikleşmiştir; bu yüzden bununla yaşamak zorundayız.

7

Ayrıntıları, Per Lindstrom'un *Aspects of Incompleteness* (Springer Verlag *Lecture Notes in Logic*, vol. 10) başlıklı çok kullanışlı küçük kitabında görebilirsiniz.

Yine de gösterilebilir ki Γ, tutarlı ve Q'yü içeren bir Σ tümceler kümesi ise, her Σ kümesi, Γ içinde zayıf bir şekilde temsil edilebilirdir. İspat, henüz geliştirmiş olmadığımız bir mekanizmayı gerekli kılar.[8]

> **Teorem** (Rosser). S gibi herhangi bir Δ kümesi için, Q'yü kapsayan herhangi bir tutarlı kuram içinde S'yi güçlü bir şekilde temsil eden bir Σ tamdeyimi vardır.

İspat: S, Δ ise, öyle $\phi(x,y)$ ve $\psi(x,y)$ bağlı tamdeyimleri vardır ki $(\exists y)\phi(x,y)$, S'yi Q içinde zayıf bir şekilde temsil eder ve $(\exists y)\psi(x,y)$, S'nin tümleyenini zayıf bir şekilde temsil eder. Bu tamdeyimleri, kendisi S'yi Q içinde zayıf bir şekilde temsil eden ve olumsuzlaması da S'nin tümleyenini zayıf bir şekilde temsil eden tek bir tamdeyim kurmak için birleştirmek istiyoruz. Q ile değil de doğru aritmetikle çalışıyor olsaydık $(\forall x)(\sim(\exists y)\phi(x,y) \leftrightarrow (\exists y)\psi(x,y))$'nin doğru oluşundan faydalanarak tamdeyimimizi yalnızca $(\exists y)\phi(x,y)$ olarak kabul edebilirdik. Gelgelelim Q ile çalışıyoruz, ve $(\forall x)(\sim(\exists y)\phi(x,y) \leftrightarrow (\exists y)\psi(x,y))$ doğru olmakla birlikte Q içinde ispat edilebilir olmayabilir. Dolayısıyla daha sinsi olmalıyız.

$\theta(x)$ tamdeyimimizin oluşturulma biçimi, etkin olarak sayılabilir kümeler için İndirgeme Teoremini ispatladığımız yöntemi andırır. Orada etkin olarak sayılabilir A ve B kümelerimiz vardı, ve $C \cup D = A \cup B$ olduğu durumda örtüşmeyen, etkin olarak sayılabilir $C \subseteq A$ ve $D \subseteq B$ kümelerini bulmak istiyorduk. Fikir, A ve B'yi aynı anda

---

8

Yine Lindstrom'un kitabına bakınız.

listelemekti. n'nin önce A'nın listesinde ortaya çıktığı durumda n'yi C'nin içine koyarken, önce B'nin listesinde ortaya çıktığı durumda D'nin içine koyuyorduk; aynı anda her iki listede ortaya çıkmaları durumunda da C'ye koyuyorduk. Üretmeye çalışıyor olduğumuz $\theta(x)$ tamdeyimi buna mukabil bir yöntemi gerekli kılar, öyle ki n verildiğinde aynı anda $(\exists y)\phi([n],y)$ için bir delil ve $(\exists y)\psi([n],y)$ için bir delil göstermeye çalışırız. İlk delilimiz $(\exists y)\phi([n],y)$ için bir delil ise $\theta([n])$ doğru yapılır, ilk delilimiz $(\exists y)\psi([n],y)$ için bir delil ise $\theta([n])$ yanlış yapılır; aynı anda her ikisi için delil olmaları durumunda $\theta([n])$ doğru yapılır.

Az önce anlattığım küçük hikaye ispatın bir parçası değildir. İspat, bir tamdeyim yazmaya ve onun çalıştığını doğrulamaya dayanır. Hikaye, tamdeyimi seçtirmek için kullanılmıştır. İşte $\theta(x)$ tamdeyimi:

$$(\exists y)(\phi(x,y) \land (\forall z < y)\neg\psi(x,y)).$$

Γ, Q'yü kapsayan tutarlı bir kuram olsun. Aşağıdaki dört önermeyi doğrulamamız gerekiyor:

(a) n, S'ye aitse $\Gamma \vdash \theta([n])$.

(b) n, S'ye ait değilse $\Gamma \vdash \neg\theta([n])$.

(c) n, S'ye aitse $\Gamma \nvdash \neg\theta([n])$.

(d) n, S'ye ait değilse $\Gamma \nvdash \neg\theta([n])$.

(a)'nın İspatı: n,S'ye aitse $\theta([n])$, Q içinde ve bundan dolayı da Γ içinde ispat edilebilir, doğru bir Σ cümlesidir.

(b)'nin İspatı: n, S'ye ait değilse bazı m doğal sayıları için $\psi([n],[m])$, doğru, bağlı bir cümledir ve bu nedenle Q'nun bir teoremidir. Dolayısıyla,

(1) $(\forall y)([m] < y \rightarrow (\exists z < y)\psi([n],z))$

Q'nun bir sonucudur.

(2) $(\forall y)([m] < y \rightarrow \sim(\forall z < y)\sim\psi([n],z))$

ve

(3) $(\forall y([m] < y \rightarrow \sim(\phi([n],y) \wedge (\forall z < y)\sim \psi([n],z)))$

de öyledirler.

n, S'ye ait olmadığı için her bir k için $\phi([n],[k])$ yanlıştır. Haliyle, her bir k için $\neg(\phi([n],[k]) \wedge (\forall z < [k])\neg\psi([n],z))$ doğrudur. Bu yüzden,

(4) $(\forall y)(y < [m] \rightarrow \sim(\phi([n],y) \wedge (\forall z < y)\sim\psi([n],z)))$

doğru bir bağlı cümledir ve bu nedenle Q'nun bir sonucudur. Ayrıca,

(5) $\sim(\phi([n],[m]) \wedge (\forall z < y)\sim\psi([n],z))$

doğru, bir bağlı cümledir ve bu nedenle Q'nun bir sonucudur. (5)

(6) $(\forall y)([m] = y \rightarrow \neg(\phi([n],y) \wedge (\forall z < y)\sim\psi([n],z)))$

'ye eşittir.

(Q11) bize şunu verir:

(7) $(\forall y)([m] < y \vee ([m] = y \vee y < [m]))$

(3), (4), (6) ve (7)'yi birleştirince

(8) $(\forall y)\sim(\phi([n],y) \wedge (\forall z < y)\sim\psi([n],z))$

'nin—ki o da

(9) $\sim\theta([n])$

'ye eşittir—Q'nun bir sonucu olduğunu ve dolayısıyla Γ'nın bir sonucu olduğunu görürüz.

(c)'nin İspatı: n, S'ye aitse, (a) dolayısıyla $\Gamma \vdash \theta([n])$ olur. Tutarlılıktan şu sonuç çıkar ki $\Gamma \nvdash \sim\theta([n])$.

(d)'nin İspatı: n, S'ye ait değilse, (b) dolayısıyla $\Gamma \vdash \sim\theta([n])$ olur. Tutarlılıktan şu sonuç çıkar ki $\Gamma \nvdash \theta([n])$.⊠

> **Tanım.** Bir $\sigma(x,y)$ tamdeyimi, bir Γ kuramı içindeki bir f tam fonksiyonunu *fonksiyonel olarak temsil eder,* her bir n için $(\forall y)\sigma([n],y) \leftrightarrow y = [f(n)])$ cümlesi Γ'nın bir sonucuysa, ve ancak böyleyse.

(Q'yü içeren) Γ kuramımız tutarlı ise f'yi Γ içinde fonksiyonel olarak temsil eden herhangi bir tamdeyiminin aynı zamanda f'yi Γ içinde güçlü bir şekilde temsil ettiğine dikkat ediniz. Tersi genel olarak geçerli değildir. θ, f'yi Γ içinde güçlü bir şekilde temsil ediyorsa her bir m ve n için

$$(\theta([n],[m]) \leftrightarrow [m] = [f(n)]$$

Γ'nın bir sonucudur. Dolayısıyla:

$$(\forall y)(\theta[n],y) \leftrightarrow y = [f(n)])$$

genellemesinin her bir örneklemesini ispatlayabiliriz, ama genellemenin bir ispatını elde etmek için sonsuz sayıda örneklemenin ispatlarını birleştirmenin herhangi bir yolu yoktur. Bu nedenle, Rosser'ın sonucunun bize sunduğuna göre, her bir f Δ tam fonksiyonu için f'yi güçlü bir şekilde temsil eden bir tamdeyim, f'yi aynı zamanda fonksiyonel olarak da temsil etmek zorunda değildir. Yine de, şimdi göreceğimiz üzere, f'yi gerçekten fonksiyonel olarak temsil eden başka bir tamdeyim bulabiliriz:

> **Teorem** (Tarski, Mostowski ve Robinson). f gibi herhangi bir Σ tam fonksiyonu için, Q'yü kapsayan herhangi bir kuram içinde S'yi fonksiyonel olarak temsil eden bir Σ tamdeyimi vardır.

İspat: Her Σ tam fonksiyonu Δ olduğundan Rosser'ın sonucu bize f'yi, Q içinde güçlü bir şekilde temsil eden $\theta(x,y)$ biçiminde Σ tamdeyimi olduğunu söyler. $\sigma(x,y)$ aşağıdaki formül olsun:

$$(\theta(x,y) \wedge (\forall z < y) {\sim}\theta(x,z)).$$

σ'nın, f'yi Q içinde (ve dolayısıyla Q'yü kapsayan her kuram içinde) fonksiyonel olarak temsil ettiğinin ispatı son ispata oldukça benzerdir. Herhangi bir n alalım.

k < f(n) ise Q $\vdash {\sim}\theta([n],[k])$ ve bundan dolayı Q $\vdash {\sim}\sigma([n],[k])$ olur. Ayrıca, Q $\vdash {\sim}[k] = [f(n)]$ ve bu nedenle Q $\vdash (\sigma([n],[k]) \leftrightarrow [k] = [f(n)]$ olur. $(\forall y)(y < [f(n)] \rightarrow (\sigma([n],y) \leftrightarrow y = [f(n)]))$, (Q içinde) ispat edilebilir şekilde k < f(n) iken $(\sigma([n],[k]) \leftrightarrow [k] = [f(n)]$ biçimindeki bütün cümlelerin birletimine denk olduğundan görürüz ki

(10) $(\forall y)(y < [f(n)] \rightarrow (\sigma([n],y) \leftrightarrow y = [f(n)]))$,

Q'nun bir teoremidir.

$(\forall z < [f(m)]){\sim}\theta([n],z)$, (Q içinde) ispat edilebilir şekilde k < f(n) iken $\neg\theta([n],[k])$ biçimindeki bütün cümlelerin birletimine denk olduğundan ve her bir k < f(n) için ${\sim}\theta([n],[k])$, Q'nun bir sonucu olduğundan $(\forall z < [f(m)]){\sim}\theta([n],z)$, Q'nun bir sonucudur.

$\theta([n],[f(n)])$, benzer şekilde Q'nun bir sonucudur, öyle ki Q, $\sigma([n],[f(n)])$'yi gerektirir ki bu da mantıki olarak şuna denktir:

(11) $(\forall y)(y = [f(n)] \rightarrow (\sigma([n],y) \leftrightarrow y =[f(n)]))$.

Q, $\theta([n],[f(n)])$'yi gerektirdiğinden ayrıca

(12) $(\forall y)([f(n)] < y \rightarrow (\exists z < y)\theta([n],z))$

'yi de gerektirir. (12) mantıki olarak şuna denktir:

(13) $(\forall y)([f(n)] < y \rightarrow \sim(\forall y)\sim\theta([n],z))$,

ki bu da doğrudan doğruya şunu gerektirir:

(14) $(\forall y)([f(n)] < y \rightarrow \sim(\theta([n],y) \wedge (\forall y)\sim\theta([n],y)))$

yani,

(15) $(\forall y)([f(n)] < y \rightarrow \sim\sigma([n],y))$.

Ayrıca Q,

(16) $\sim[f(n)] < [f(n)]$

'yi gerektirdiğinden Q şunu da gerektirir:

(17) $(\forall y)([f(n)] < y \rightarrow \neg y = [f(n)])$.

(15) ve (17) beraber şunu gerektirirler:

(18) $(\forall y)([f(n)] < y \rightarrow (\sigma([n],y) \leftrightarrow y = [f(n)]))$.

(10), (11), (18) ve (Q11) beraber şunu gerektirirler:

(19) $(\forall y)(\sigma([n],y) \leftrightarrow y = [f(n)])$.⊠

Robinson Aritmetiği bizatihi bizi ilgilendirmiyor. Bu aritmetik, bazı teoremleri ispatlama aracı olarak teknik yönden faydalıdır, ancak kendi başına önemli değildir. Bilhassa, Q içindeki ispatlamalar, doğal sayılar hakkındaki sezgiye dayalı düşünme yöntemlerimize pek az benzerler. Şimdi dikkatimizi, doğal sayılar hakkında formel olmayan ispatlamalar yaparken nasıl akıl yürüttüğümüzü yansıtma konusunda çok iyi bir iş çıkaran, çok daha güçlü bir kurama, Peano Aritmetiği'ne çeviriyoruz.