Gödel Numaralandırması

{x: x bir attır}, dünyanın bütün atlarını öğe olarak barındıran ve başka hiçbir şey barındırmayan bir yığındır. Buradan hareketle şunu elde ederiz:

Herhangi bir y için, y bir at ise, ve ancak böyleyse, y $\in$ {x: x bir attır}.

Yolcu, örneğin, bir attır, öyleyse Yolcu $\in$ {x: x bir attır}. Bu kalıbın genel olarak geçerli olmasını bekleyeceğiz; bu yüzden boşluğun herhangi bir şekilde doldurulmuş hali için şunu elde ederiz:

Herhangi bir y için, y bir ... ise, ve ancak böyleyse, y $\in$ {x: x bir...'dır}.

Durumun böyle olmasını bekleriz. Ama şimdi boşluğu "kendisinin bir öğesi değil" ile doldurmayı deneyin; şunu elde ederiz:

Herhangi bir y için, y kendi kendinin öğesi değil ise, ve ancak böyleyse, y $\in$ {x: x kendi kendinin öğesi değildir}.

"y" yerine "{x: x kendi kendinin öğesi değildir}" i konursa bir çelişki elde edilir:

{x: x kendi kendinin öğesi değildir} kendi kendinin öğesi değil ise, ve ancak böyleyse,{x: x kendi kendinin öğesi değildir} $\in$ {x: x kendi kendinin öğesi değildir} .

Bu *Russell'ın paradoksu*dur; yirminci yüzyılın başlarında matematiğin temellerini sarsan birçok küme kuramı paradokslarından birisi. Bu paradoksların bu kadar rahatsız edici olmalarının sebebi ondokuzuncu yüzyılın son birkaç onyılı boyunca küme fikrinin, matematiğin bilhassa da kalkülüsün temellerini netleştirmede ve güvence altına almada giderek artan bir rol oynamış olmasıydı. Paradokslar, kümeler kuramını güvenilmez kılmak suretiyle bütün bu kazanımların geri alınması tehditini oluşturuyorlardı.

Bu paradokslara karşılık vermek için kullanılacak bir strateji, ümit edilen odur ki ilkeli bir temelde, boşlukları doldurabilmenin yolunu çelişkileri önlemeye yetecek ama kümeler kuramının faydalı matematiksel rollerini oynamasına engel olmayacak şekilde sınırlandıran aksiyomlar kullanmaktır. Ama aksiyomlarımızın yine de çelişkiler üretmediğini nasıl bileceğimiz iyi bir sorudur. Aksiyomlar, Russell'ı bir çelişki elde etmeye götüren yolu kapatmaya yönelik olarak seçilir; ama yine de daha dolambaçlı birtakım yollardan bir çelişkiye ulaşmayacağımızdan nasıl emin olabiliriz?

David Hilbert bu probleme yenilikçi bir çözüm önerdi. Normal olarak, matematikçiler noktalar, çizgiler, düzlemler, fonksiyonlar ve sayılar gibi şeyleri çalışırlar ve matematiksel ispatları bu şeyler hakkında bilgi edinmede araç olarak kullanırlar. Hilbert, matematiksel ispatların bizzat kendilerini matematiksel araştırmanın nesneleri olarak ele almayı önerdi. Matematiğin yeni bir dalı, *metamatematik*, geometricilerin noktaları, çizgileri ve düzlemleri çalıştığı şekilde ispatları çalışacaktı. Ümit edilen, ispatların bir incelemesinin kümeler kuramının aksiyomlarının bir çelişkiye yol açmayacağını ispatlamamıza olanak tanıyacağıydı. Grafik kuramcıları, eğrilerle bağlanan karmaşık bir noktalar ağı içerisinde bir konumdan diğerine bir yol bulmanın hangi durumda mümkün olduğunu araştırırlar. İspat kuramcıları benzer bir şey yaparlar; aksiyomların bir çelişkiye mahal verdiği bir yol olup olmadığını görmeye çalışırlar. Russell'ın paradoksu, bize kümeler kuramı içindeki ispatlara karşı dikkatlı olmamız gerektiğini öğretmiştir. Hilbert, ispat kuramcıları tarafından üretilen ispatlara karşı benzer bir şekilde çekince koymamızın gerekmediğini düşünür. Fark şudur ki kümeler, çoğunlukla sonsuzdurlar ve bundan dolayı aşikar bir şekilde gösterilmeleri veya bütünüyle incelenmeleri imkansızdır. Buna karşılık ispatlar, fiilen kağıt üzerine tamamını yazabildiğimiz sonlu nesnelerdir.

Metamatematik, Hilbert'in de öngördüğü üzere matematiğin geri kalanından ayrıdır çünkü o, olağan matematikçilerin çalıştığı şeylerden farklı türde bir şeyi çalışır. Gödel, farklı sembollere aritmetik kodlar atamak suretiyle ispat kuramını olağan matematiğe uydurmanın bir metodunu üreterek bir cümlenin belirli bir aksiyomlar kümesinden ispat edilebilir olup olmadığı sorusunu aritmetik bir soruya dönüştürdü.

Kodlamanın ayrıntıları epey keyfidir. Burada göreceğimiz, birçok imkandan yalnızca bir tanesidir. Terimleri sıralı ikililer ve sıralı üçlüler şeklinde kodlayarak başlayacağız.

Herhangi bir x, y ve z için, Üçlü(x,y,z) = İkili(x,İkili(y,z)). w = Üçlü(x,y,z) ise 1inci3(w) = x, 2nci3(w) = y, ve 3üncü3(w) = z'dir.

"0" için kod, ⌜0⌝ şeklinde kısalttığımız İkili(1,0) ikilisidir.

"x_n" için kod, ⌜x_n⌝ şeklinde kısalttığımız İkili(2,n) ikilisidir.

sτ için kod, ⌜sτ⌝ şeklinde kısalttığımız İkili(4,⌜τ⌝) ikilisidir.

(τ+ρ) için kod, ⌜(τ + ρ)⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(5,⌜τ⌝,⌜ρ⌝) üçlüsüdür.

(τ•ρ) için kod, ⌜(τ • ρ)⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(6,⌜τ⌝,⌜ρ⌝) üçlüsüdür.

(τ E ρ) için kod, ⌜(τ E ρ)⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(7,⌜τ⌝,⌜ρ⌝) üçlüsüdür.

Bir sayı, aşağıdaki koşulları sağlayan her bir *S* sayılar kümesinin öğesi ise, ve ancak böyleyse, bir terimin kodudur:

İkili(1,1) ∈S.

İkili(2,i) ∈S.

x, S'ye aitse İkili(4,x) de öyledir.

x ve y, S'ye aitse Üçlü(5,x,y), Üçlü(6,x,y) ve Üçlü(7,x,y) de öyledirler.

Bu koşulları sağlayan herhangi bir küme sonsuz olacaktır ve biz, aritmetik dili içinde sonsuz kümelerden bahsedemeyiz. Aritmetik dili içinde kodlar kümesinden bahsetmek istiyorsak söylemek istediğimiz şeyleri yalnızca sonlu kümeler kullanarak söylemenin yollarını anlamamız gerekir ki böylece sonlu kümelerin sayısal kodlara sahip oldukları gerçeğinden yararlanabilelim. Böylesi bir çaba, aşağıdaki teoremi verir:

Teorem. Terimlerin kodlarının kümesi, bir Δ kümesidir.

İspat. Terimlerin kodlarının kümesi Σ'dır. x, aşağıdaki özelliklere sahip sonlu bir s kümesinin öğesiyse, ve ancak öyleyse, bir terimin kodudur:

İkili(4,y) ∈s ise y ∈s'dir.

Üçlü(5,y,z) ∈s ise y ∈s ve z ∈s'dir.

Üçlü(6,y,z) ∈s ise y ∈s ve z ∈s'dir.

Üçlü(7,y,z) $\in$ s ise y $\in$ s ve z $\in$ s'dir.

y $\in$ s ise ya y = İkili(1,0)'dır ya da $(\exists n < y)$y = İkili(2,n)'dir ya da

$(\exists n < y)$y = İkili(4,n)'dir ya da $(\exists m < s)(\exists n < s)$y = Üçlü(5,m,n)'dir ya da

$(\exists m < s)(\exists n < s)$y = Üçlü(6,m,n)'dir ya da $(\exists m < s)(\exists n < s)$y = Üçlü(7,m,n)'dir.

Bu koşulların sağlanması için s'nin kod sayısının sahip olması gereken özellikler bağlı bir tamdeyimle ifade edilebilir.

Terimlerin kodlarının kümesinin tümleyeni Σ'dır. Aşağıdaki tanımı göz önünde bulundurmak faydalı olacaktır:

Tanım. $x \dot{-} y = x - y$, $x \geq y$ ise;

$= 0$, $x < y$ ise.

$((z + y) = x \vee (x < y \wedge z = 0)$ olduğunda, ve ancak böyle olduğunda, $x \dot{-} y = z$ olduğunu dikkate alınız; bu bir bağlı tamdeyim olduğundan $\dot{-}$, bir Δ tam fonksiyonudur.

x'in, kapalı bir terimin kodu olmadığı durumda, x'in yapı ağacını oluşturmayı denersek ne “0”da ne de bir değişkende sonlanan bir dal bulunacaktır. Bu nedenle, aşağıdaki özelliklere sahip bir s sonlu dizisi olduğunda, ve ancak böyle olduğunda, x, bir terimin kodu değildir:

$(s)_0 = x$.

n < uzunluk(s) ve $(s)_n$ = İkili(4,y) ise n+1 < uzunluk(s) ve $(s)_{n+1}$ = y'dir.

n < uzunluk(s) ve $(s)_n$ = Üçlü(5,y,z) ise n+1 < uzunluk(s) ve $(s)_{n+1}$ ya y'ye ya da z'ye eşittir.

n < uzunluk(s) ve $(s)_n$ = Üçlü(6,y,z) ise n+1 < uzunluk(s) ve $(s)_{n+1}$ ya y'ye ya da z'ye eşittir.

n < uzunluk(s) ve $(s)_n$ = Üçlü(7,y,z) ise n+1 < uzunluk(s) ve $(s)_{n+1}$ ya y'ye ya da z'ye eşittir.

$n+1 < \text{uzunluk}(s)$ ise ya $(s)_n = \text{İkili}(4,(s)_{n+1})$ ya da $(\exists z < s)(s)_n$ ya Üçlü$(5,(s)_{n+1},z)$'ye ya Üçlü$(5,z,(s)_{n+1})$'e ya Üçlü$(6,(s)_{n+1},z)$'ye ya Üçlü$(6,z,(s)_{n+1})$'e ya Üçlü$(7,(s)_{n+1},z)$'ye ya da Üçlü$(7,z,(s)_{n+1})$'e eşittir.

$(s)_{\text{uzunluk}(s) \dot{-} 1} \neq \text{İkili}(1,0)$.

$\neg(\exists n < s)(s)_{\text{uzunluk}(s) \dot{-} 1} = \text{İkili}(2,n)$.⊠

Kapalı tamdeyimlerin kodlarının kümesi Δ'dır; değişkenler için verilecek koşulları boşverin.

Teorem. y'nin bir terim ve x'in y'nin bir altterimi olduğu <x,y> ikililerinin kümesi Δ'dır.

İspat: "y bir terimdir ve x bir altterimdir" dediğimde aslında söylemek istediğim şey, y'nin bir terimin kodu olduğu ve x'in de bir altterimin kodu olduğudur. Çoğu zaman bu ayrımı ihmal edeceğim. Buna alışacaksınız.

y bir terim olduğunda, x, aşağıdaki koşulları sağlayan her bir sonlu kümenin öğesiyse, ve ancak böyleyse, y'nin bir altterimidir :

y, kümeye aittir.

İkili(4,z) kümeye aitse z dekümeye aittir.

Üçlü(5,z,w), Üçlü(6,z,w) ya da Üçlü(7,z,w) kümeye aitlerse z ve w de kümeye aitlerdir.

Bu gösterir ki y'nin bir terim ve x'in bir alt-terim olduğu <x,y> ikililerinin kümesi Π'dir. Bunun aynı zamanda Σ olduğunu görmek için şunu dikkate alalım ki y bir terim olduğunda, aşağıdaki özelliklere sahip sonlu bir kümeyi kodlayan bir s sayısı varsa, ve ancak böyleyse, x, y'nin bir altterimidir:

y, kümeye aittir.

İkili(4,z) s'ye aitse, z kümeye aittir.

Üçlü(5,z,w), Üçlü(6,z,w) ya da Üçlü(7,z,w) kümeye aitlerse, z ve w kümeye aitlerdir.

t < s, y'yi içeren ve şu özelliklere sahip olan bir kümenin koduysa, x, t tarafından kodlanan kümenin öğesidir: her ne zaman İkili(4,z), t tarafından kodlanan kümeye ait olursa z, t tarafından kodlanan kümeye aittir, ve her ne zaman Üçlü(5,z,w), Üçlü(6,z,w) ya da Üçlü(7,z,w)'den biri, z tarafından kodlanan kümeye ait olursa, z ve w, t tarafından kodlanan kümeye aitlerdir.⊠

Bir *sonlu ağaç*, kümenin bir üyesinin herhangi bir başlangıç parçasının, kümenin bir üyesi olduğu, sonlu bir diziler kümesidir; s'nin, bir sonlu ağacın kodu olduğu iddiası bağlı bir tamdeyimle formelleştirilebilir. Bir *sonlu ikili ağaç*, baştan sona 0'lar ve 1'ler dizilerinden meydana gelen bir sonlu ağaçtır. x, bir terimin kodu olduğunda x için bir *yapı ağacı*, bir İkili(s,f) ikilisidir; burada s, bir sonlu ikili ağacın kodu ve f, aşağıdaki özelliklere uyan, tanım kümesi s tarafından kodlanan kümenin elemanlarının kümesi olan bir fonksiyondur:

f, ağacın gövdesi olan < >'e x'i atar.

y ∈ s ve f(y) = İkili(4,z) ise y ^ <0> ∈ s ve f(y ^ <0>) = z ve y ^ <1> ∉ s'dir.

y ∈ s ve f(y) = Üçlü(5,z,w) ise y ^ <0> ve y ^ <1>'in her ikisi de s'ye aitlerdir ve f(y ^ <0>) = z ve f(y ^ <1>) = w'dur.

y ∈ s ve f(y) = Üçlü(6,z,w) ise y ^ <0> ve y ^ <1>'in her ikisi de s'ye aitlerdir ve f(y ^ <0>) = z ve f(y ^ <1>) = w'dur.

y ∈ s ve f(y) = Üçlü(7,z,w) ise y ^ <0> ve y ^ <1>'in her ikisi de s'ye aitlerdir ve f(y ^ <0>) = z ve f(y ^ <1>) = w'dur.

y ^ <0> ∈ s ve f(y ^ <0>) = z ise ya f(y) = İkili(4,z)'dir ya da

(∃w < s)(f(y ^ <1>) tanımlanmış ve w'ya eşittir ve f(y) = Üçlü(5,z,w))'dur

ya da

(∃w < s)(f(y ^ <1>) tanımlanmış ve w'ya eşittir ve f(y) = Üçlü(6,z,w))'dur

ya da

(∃w < s)(f(y ^ <1>) tanımlanmış ve w'ya eşittir ve f(y) = Üçlü(7,z,w))'dur.

y ^ <1> ∈ s ve f(y ^ <1>) = w ise bazı z < s'ler için f(y ^ <0>) tanımlanmış ve z'ye eşittir ve ya f(y) = Üçlü(5,z,w)'dur ya f(y) = Üçlü(6,z,w)'dur ya da f(y) = Üçlü(7,z,w)'dur.

y ∈ s ise ve ne y ^ <0> ne de y ^ <1> s'ye aitse ya f(y) = İkili(1,0)'dır

ya da (∃n < s)f(y) = İkili(2,n)'dir.

Benzersiz Okunurluk Lemması. Her bir terim (kodu) benzersiz bir yapı ağacına sahiptir.

Bunu ispatlamanın en dolambaçsız yolu benzersiz bir yapı ağacı olan terimler kümesinin her bir i için İkili(1,1) ve İkili(2,i)'yi içerdiğini ve her ne zaman y ve z'yi içerirse İkili(4,y), Üçlü(5,y,z), Üçlü(6,y,z) ve Üçlü(7,y,z)'yi içerdiğini göstermek olacaktır. Böylesi bir ispat, sonsuz sayılar kümesinden bahsettiğinden aritmetik dili içerisinde gerçekleştirilemez. İspatın tam olarak aritmetik bir örneğini elde etmek için bir terimi kodlayan özel bir y sayısı seçmeliyiz ve y'nin her bir altteriminin, söz konusu çıkarımı, yalnızca y'nin altterimlerinden bahseder bir şekilde deyimleştiren benzersiz bir yapı ağacının olduğunu göstermeliyiz. Ayrıntıları incelemeyeceğim.

Teorem. Kapalı bir terimi, sembolize ettiği sayıya götüren Den fonksiyonu Δ'dır.

İspat: Aşağıdaki özelliklere sahip sonlu bir s kümesi varsa, ve ancak böyleyse, Den(x) = v'dir:

İkili(x,v) ∈ s.

y ∈ s ise 1inci(y), kapalı bir terimdir.

kili(İkili(1,1),u) s'ye aitse y = 0'dır.

İkili(İkili(4,y),u) s'ye aitse u > 0'dır ve İkili(y,u ∸ 1) s'ye aittir.

İkili(Üçlü(5,y,z),u) s'ye aitse İkili(y,t) ve İkili(z,w)'nun s'ye ait olduğu ve u = t + w olan t ve w vardır.

İkili(Üçlü(6,y,z),u) s'ye aitse İkili(y,t) ve İkili(z,w)'nun s'ye ait olduğu ve $u = t \cdot w$ olan t ve w vardır.

İkili(Üçlü(7,y,z),u) s'ye aitse İkili(y,t) ve İkili(z,w)'nun s'ye ait olduğu ve $u = t^w$ olan t ve w vardır.

Bu, bir Σ tamdeyimiyle formelleştirilebilir. Den, bir Δ tanım kümesine sahip bir Σ kısmi fonksiyonu olduğundan Δ'dır.⊠

Tamdeyimleri de aynı yöntemle kodlarız:

τ ve ρ terim iseler τ = ρ için kod, ⌜τ = ρ⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(8,⌜τ⌝,⌜ρ⌝)'dur.

τ ve ρ terim iseler τ < ρ için kod, ⌜τ < ρ⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(9,⌜τ⌝,⌜ρ⌝)'dur.

φ bir tamdeyim ise ~φ için kod, ⌜~φ⌝ şeklinde kısalttığımız İkili(10,⌜φ⌝)'dir.

φ ve ψ tamdeyimler ise (φ ∨ ψ) için kod, ⌜(φ ∨ ψ)⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(11,⌜φ⌝,⌜ψ⌝)'dir.

φ ve ψ tamdeyimlerse (φ ∧ ψ) için kod, ⌜(φ ∧ ψ)⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(12,⌜φ⌝,⌜ψ⌝)'dir.

φ ve ψ tamdeyimlerse (φ → ψ) için kod, ⌜(φ → ψ)⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(13,⌜φ⌝,⌜ψ⌝)'dir.

φ ve ψ tamdeyimlerse (φ ↔ ψ) için kod, ⌜(φ ↔ ψ)⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(14,⌜φ⌝,⌜ψ⌝)'dir.

φ bir tamdeyimlerse $(\forall x_n)$φ için kod, ⌜$(\forall x_n)$φ⌝ şeklinde kısalttığımız Üçlü(15,n,⌜φ⌝)'dir.

ϕ bir tamdeyimlerse $(\exists x_n)\phi$ için kod, $\ulcorner(\exists x_n)\phi\urcorner$ şeklinde kısalttığımız Üçlü(16,n,$\ulcorner\phi\urcorner$)'dir.

Teorem. Tamdeyimlerin kodlarının kümesi Δ'dır.

İspat, terimlerin kodları için verilen mukabil ispata o kadar yakındır ki incelemenin ciddi bir anlamı yoktur. y tarafından kodlanan, x'in bir alttamdeyiminin kodu olduğu tamdeyim Δ'dır şeklindeki <x,y> ikililerinin kümesinin ispatı için de aynısı geçerlidir. Terimler için yaptığımız şekilde tamdeyimler için yapı ağaçları tanımlarız ve bir kez daha benzersiz okunurluk elde ederiz.

Teorem. θ'nın bir tamdeyim, τ'nun bir terim ve n'nin bir doğal sayı olduğu durumda $<\ulcorner\theta\urcorner,n,\ulcorner\tau\urcorner>$'yu $\ulcorner\theta\underline{x_n/\tau}\urcorner$'ya götüren Sub fonksiyonu Δ'dır.

İspat: Öncelikle, τ terimleri ve bir n doğal sayısı verildiğinde $<\ulcorner\rho\urcorner,n,\ulcorner\tau\urcorner>$'yu $\ulcorner\rho\underline{x_n/\tau}\urcorner$'ya götüren fonksiyonun Σ olduğunu ve bundan dolayı bir Δ tanım kümesine sahip bir Σ kısmi fonksiyonu olarak Δ olduğunu dikkate alın. Bu böyledir, çünkü aşağıdaki özelliklere sahip sonlu bir s kümesi varsa, ve ancak böyleyse, $<\ulcorner\rho\urcorner,n,\ulcorner\tau\urcorner>$ girdisiyle fonksiyonun aldığı değer z'dir:

İkili($\ulcorner\rho\urcorner$,z), s'ye aittir.

y, s'ye aitse 1inci(y) ve 2inci(y)'nin her ikisi de s'ye aitlerdir.

İkili(İkili(1,1),y), s'ye aitse y = İkili(1,1)'dir.

İkili(İkili(2,i),y), i $\neq$ n olmak kaydıyla s'ye aitse y = İkili(2,i)'dir.

İkili(İkili(2,n),y), s'ye aitse y = $\ulcorner\tau\urcorner$'dur.

İkili(İkili(4,u),y), s'ye aitse 1inci(y) = 4'tür ve İkili(u,2inci(y)), s'ye aittir.

İkili(Üçlü(5,u,v),y), s'ye aitse 1inci(y) = 5'tir ve İkili(u,2nciiçinde3(y)) ve İkili(v,3üncüiçinde3(y))'nin her ikisi de s'ye aittir.

İkili(Üçlü(6,u,v),y), s'ye aitse 1inci(y) = 6'dır ve İkili(u,2nciiçinde3(y)) ve İkili(v,3üncüiçinde3(y))'nin her ikisi de s'ye aittir.

İkili(Üçlü(7,u,v),y), s'ye aitse 1inci(y) = 7'dir ve İkili(u,2nciiçinde3(y)) ve İkili(v,3üncüiçinde3(y))'nin her ikisi de s'ye aittir.

θ bölümsüz bir tamdeyim, τ bir terim ve n bir doğal sayı olduğunda, $\ulcorner\theta\underline{x_n/\tau}\urcorner$, aşağıdaki şekilde verilir:

$\ulcorner\rho = \sigma\underline{x_n/\tau}\urcorner$ = Üçlü(8,$\ulcorner\rho\underline{x_n/\tau}\urcorner$,$\ulcorner\sigma\underline{x_n/\tau}\urcorner$).

$\ulcorner\rho < \sigma\underline{x_n/\tau}\urcorner$ = Üçlü(9,$\ulcorner\rho x_n/\tau\urcorner$,$\ulcorner\sigma\underline{x_n/\tau}\urcorner$).

İspatı tamamlamak için terimlerle az önce yaptığımız şeyin aynısını tamdeyimlere yapmamız gerekir. Meşakkatli olan ve yeni herhangi bir fikir içermeyen ayrıntıları vermeyeceğim.⊠