# Doğru Aritmetiğin Standart Olmayan Modelleri

Aritmetik dilinin standart modelinden epey bahsettik ama doğru aritmetiğin (standart model içinde doğru olan cümlelerin kümesi), standart modelle eşyapılı olmayan başka modelleri de vardır. Gerçekten de, “c”nin yeni bir sabit olduğu bütün “[n] < c” cümleleriyle birlikte doğru aritmetikten meydana gelmiş Γ kuramını göz önüne alın. Δ, Γ'nın sonlu bir altkümesiyse “c”nin “[n] < c” ∈ Δ olan herhangi bir n sayısından daha büyük bir sayıyı belirtmesine izin vermek suretiyle standart modeli genişleterek Δ'in bir modelini elde edebiliriz. Sıkılık teoreminden Γ'nın bir modeli olduğu sonucu çıkar. Γ'nın bir modeli, doğru aritmetiğin standart olmayan bir modeli olacaktır; yani, doğru aritmetiğin standart modelle eşyapılı [1] olmayan bir modeli.

Doğru aritmetiğin standart olmayan bir $\mathfrak{A}$ modelinin bir *başlangıç parçası*, tıpkı standart modelde olduğu gibi tanımlanır: herhangi bir y ∈ S için, |$\mathfrak{A}$|'nun $<^{\mathfrak{A}}$ y olan herhangi bir öğesi S'nin bir öğesiyse, ve ancak böyleyse, S ⊆ |$\mathfrak{A}$| bir başlangıç parçasıdır. n'yi $[n]^{\mathfrak{A}}$'ye ileten götürüm, standart modellerden $\mathfrak{A}$'nun bir başlangıç parçası üzerine bir eşyapılılıktır. |$\mathfrak{A}$|'nun bu eşyapılılığın değer kümesinde yer almayan öğeleri, *standart olmayan* öğelerdir. Eşyapılılığın değer kümesinin bir başlangıç parçası olduğunu anlamak için, önce, “(∀x)¬ x < 0” doğru aritmetiğin bir parçası olduğundan, $\mathfrak{A}$'nun $0^{\mathfrak{A}}$'nun altındaki herhangi bir standart olmayan öğeyi gizleyemediğini dikkate alın. $[n+1]^{\mathfrak{A}}$'nun

---

1

$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ aritmetik dilinin modelleri olmak kaydıyla, f(x) $<^{\mathfrak{B}}$ f(y) olduğunda ve ancak böyle olduğunda, $\mathfrak{A}$'dan $\mathfrak{B}$'ye bir eşyapılılık, $f(0^{\mathfrak{A}}) = 0^{\mathfrak{B}}$, f(x $+^{\mathfrak{A}}$ y) = f(x) $+^{\mathfrak{B}}$ f(y), x $<^{\mathfrak{A}}$ y ve benzeri özellikleri sağlayan |$\mathfrak{A}$|'dan |$\mathfrak{B}$|'ye bire-bir ve örten bir f fonksiyondur. σ, $\mathfrak{A}$ için bir değişken ataması ise σ, f□σ'nın $\mathfrak{B}$ içinde sağladığı formüllerin aynılarını $\mathfrak{A}$ içinde sağlar. (Burada f□σ, f□σ(v) = f(σ(V)) şeklinde verilmiş $\mathfrak{B}$ için değişken atamasıdır.) Bundan aynı cümlelerin $\mathfrak{A}$ içinde ve $\mathfrak{B}$ içinde doğru oldukları sonucu çıkar.

altındaki herhangi bir standart olmayan öğeyi içeri sıvıştıramaz çünkü “$(\forall x)(x < [n+1] \leftrightarrow (x = [0] \vee x = [1] \vee ... \vee x = [n]))$” doğru aritmetiğin içindedir.“$(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x)$”e sahip olduğumuz için bütün standart olmayan modeller bütün standart modellerden daha büyüktür.

a, standart olmayan bir öğe olsun. Doğru aritmetik, bize, her sayının bir bitişik ardıla sahip olduğuna ve 0 dışında her sayının bir bitişik öncüle sahip olduğuna ilişkin güvence verdiği için a'nın bitişik komşuluğu tıpkı (pozitif ve negatif) tamsayılar gibi görünür. $[2]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} a$, bütün $a +^{\mathfrak{A}} [n]^{\mathfrak{A}}$'lardan daha büyüktür ve $[2]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} a$'nın bitişik komşuluğu tıpkı tamsayılar gibi görünür. Benzer şekilde, $[3]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} a$, bütün $([2]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} a) +^{\mathfrak{A}} [n]^{\mathfrak{A}}$'lardan daha büyüktür ve $[3]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} a$'nın bitişik komşuluğu tıpkı tamsayılar gibi görünür. $a \bullet^{\mathfrak{A}} a$, bütün $[n]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} a$'lardan daha büyüktür ve $a \bullet^{\mathfrak{A}} a$'nın bitişik komşuluğu tıpkı tamsayılar gibi görünür.

a, ya “x çifttir”i ya da “x tektir”i sağlar.[2] Durum birincisiyse, ikiyle çarpıldığında a'yı veren standart olmayan bir öğe vardır. Durum ikincisiyse ikiyle çarpıldığında $a +^{\mathfrak{A}} [1]^{\mathfrak{A}}$'yu veren standart olmayan bir öğe vardır. Her halükarda a'nın yaklaşık olarak yarısı olan standart olmayan bir sayı elde ederiz. Bu standart olmayan modelin bitişik komşuluğu tıpkı tamsayılar gibi görünür. Benzer şekilde, a'nın yaklaşık olarak üçte biri olan standart olmayan bir sayı vardır, a'nın yaklaşık üçte ikisi olan bir tane, ve benzeri. Herhangi bir p ve q tamsayıları için, standart olmayan öyle bir b sayısı vardır ki $[q]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} b$

[2] Yani, a, ya “$(\exists y)([2] \bullet y) = x$”i ya da “$(\exists y)(([2] \bullet y) + [1]) = x$”i sağlar.

ve $[p]^{\mathfrak{A}} \bullet^{\mathfrak{A}} a$, standart bir sayı ile farklılaşır. Diğer bir ifadeyle, $^{p}/_{q}$ kere a'ya yaklaşık olarak eşit olan standart olmayan bir sayı vardır.

Sadece sıralamaya bakarak sayılabilir standart olmayan modellerin neye benzediğini tam olarak söyleyebiliriz. Tamsayıların bir takım kopyaları tarafından takip edilen, doğal sayılar gibi görünen bir başlangıç parçası vardır. Tamsayıların kopyaları sıralıdır; birincinin üyeleri $<^{\mathfrak{A}}$ ikincinin üyeleri ise, ve ancak böyleyse, bir kopya diğerinden daha küçükür diyebiliriz. Kopyalar üzerindeki sıralama, rasyonel sayılar üzerindeki sıralamayla eşyapılıdır. Bu tanımlama, doğru aritmetiğin sayılabilir, standart olmayan modelleri üzerindeki sıralama bağıntısını, özellikle eşyapılılığa göre niteler. (Sayılamaz modeller için tanımlama benzerdir ama kesinleştirmek daha zordur çünkü sayılamaz standart olmayan modeller, karşılıklı eşyapılı değildir.) Burada ispatını incelemeyeceğim ama bunun için Boolos ve Jeffrey'nin 17. bölümüne bakabilirsiniz.[3]

Standart olmayan modeller, epistemolojik olarak sıkıntılıdırlar. "Fido" ismi, kulaklarının arkasını kaşımış olduğumuz bir şeyi adlandırır ve "Fido" kelimesini kullanışımız ile köpek Fido arasındaki nedenlilik ilişkisi, kelimenin, mevcut gönderimde bulunuşuna ilişkin açıklamanın bir parçasıdır. Teorik terimler ve nedensel şekilde ilişkili olduğumuz şeyleri adlandırmayan diğer terimler için doğrudan bir nedensel açıklama yoktur, ama dolaylı bir nedensel açıklama olabilir. Teorik varlıkların doğrudan nedensel şekilde ilişkili olduğumuz varlıklarla nasıl bağlantılı olduğunu ve teorik terimlerin, kuramın onlara yüklediği rolü oynamaya en çok yaklaşan öğeler her neyse onları

3

George Boolos ve Richard Jeffrey, *Computability and Logic*, 3üncü edisyon (New York and Cambridge: Cambridge University Press, 1989).

adlandırdığını söyleyen, muhtemelen de formel olmayan, bir kurama sahibiz. ("Rolü oynayan"dan ziyade "rolü oynamaya en çok yaklaşan", çünkü kuramlarımızın bütünüyle hatasız olduğunu iddia etmek gülünç olacaktır.) Teorik varlıklar, deneyimin nesnelerine ne kadar yakın olurlarsa nedensel ilişkilerin gönderimi saptamakta oynayacağı rol o kadar öne çıkar. Sayılar gibi deneyimin nesneleriyle fazlasıyla ilgisiz olan şeyler noktasına geldiğimizde nedensel ilişkiler neredeyse görüntüden çıkmış olur. Elbette günlük nesneleri saymak için sayıları kullanırız ama sayma amaçları uğruna yalnızca doğal sayılar sisteminin en başındaki sayıları kullanırız, öyle ki bu sayıları kullanma şeklimiz bize bir bütün olarak doğal sayıların yapısını anlatmakta hiç de başarılı olmaz. Matematiksel terimlerimizin anlamları matematik kuramlarımız tarafından verilir dersek abartmış olmayız.

Şimdi bir problemimiz var. İleride ayrıntılı bir şekilde göreceğimiz gibi aritmetik kuramımız — doğru olarak ayırt edebildiğimiz aritmetik cümleler kümesi —, doğru aritmetiğin epeyce gerisinde kalır. Ama doğru aritmetiği aşırabilseydik bile bu, aritmetik terimlerin anlamlarını saptamak için yeterli değildir. Aritmetik kuramımız, doğru aritmetik olsaydı dahi bu, doğal sayıların yapısını saptamak için yeterli olmayacaktı çünkü kuram, standart olmayan modellere sahiptir.

Kolay bir yanıt, aritmetik kuramımızın yalıtılmamış olduğunu söylemek olacaktır. Doğal sayılar hakkındaki inançlarımız, reel sayılar ve kümeler hakkındaki inançlarımızı içeren daha geniş bir inanç sistemi içine yerleştirilmiştir. Aritmetik terimlerin rolüne bu daha geniş teorik sistem dahilinde bakıyor olmalıyız.

Bu kolay bir yanıttır ama faydalı bir yanıt değildir çünkü aynı muhakemeyi, kümeler kuramı dilini ve reel analiz dilini içeren daha geniş bir dile uygulayabiliriz.

Sıkılık teoremi hala geçerlidir, öyleyse daha geniş dilin doğru tümcelerinin kümesi, hala, standart olmayan doğal sayılardan oluşan modellere sahip olacaktır. Aritmetik hakkında kuşkucu olmak için son derece rahatsız edici bir nedene hala sahibiz.

Farklı bir yanıt, matematik kuramımızı yüklemler dizgesi içinde değil de sıkılık teoreminin uygulanmadığı daha dayanıklı bir mantık içinde biçimlendirmemiz gerektiğidir. (Genellikle önerilen alternatif, ki birazdan kısaca tanımlayacağız ikinci düzey yüklemler dizgesidir.) Bu yanıt, potansiyel olarak daha yararlıdır ama o kadar da kolay değildir. Bu, problemimizi Enron tarzı hesaplama uygulamaları vasıtasıyla "çözmüş" olduğumuz kuşkusunu uyandırır. "Matematiksel" mefhumlar olarak adlandırmaya alışık olduğumuz birtakım fikirler, şimdi yeniden isim verilmiş "mantıki" mefhumlar olmuşlardır, ki böylece önceden matematiğin temellerine dair olan bir problem, şimdi mantığın temellerine dair bir problemdir. Biz problemi yeniden etiketlemiş olduk, ama hiçbir şeyi çözmüş olmadık çünkü matematiksel terimlerin anlamlarını saptamaya dair eski zorluk, birinci dereceden yüklemler dizgesinin ötesine geçtiğimizde ortaya attığımız yeni mantıki terimlerin anlamlarını saptamaya dair bir problem şeklinde yeniden ortaya çıkmış oldu, ya da böyle görünüyor. Konu son derece tartışmalı olarak kalır ve bunu burada çözüme kavuşturmak için hiç de umudumuz yok.