Neden Hesaplanabilirlik Çalışmalıyız?

S gibi bir küme için *karar yöntemi* dediğimiz şey "Filan şey S'de yer alır mı?" biçimindeki soruları doğru bir şekilde yanıtlayan bir algoritmadır – yani tamamen mekanik bir hesaplama yöntemidir. S için *ispat yöntemi* dediğimiz şey karar yönteminin olumlu yarısıdır. *a*, S'de yer alıyorsa *a*'nın S'de yer aldığının bir "ispatı" vardır ve bu ispat gayretli bir araştırmayla bulunabilir; *a,* S'de yer almıyorsa böyle bir ispat yoktur. Dahası, bir ispat arama ve bulduğunuzun ispat olup olmadığını belirleme işlemleri de bütünüyle mekanik bir biçimde gerçekleştirilebilir.

Mantık I'de önermeler dizgesinde geçerli olan cümleler için iki karar yöntemi öğrendik; doğruluk çizelgesi yöntemi ve karşı örnek arama yöntemi. Ayrıca yüklemler dizgesinde geçerli her cümleyi türetmemize imkan tanıyan bir kurallar sistemi de öğrendik. Bu kurallar geçerli cümlelerin kümesi için bir ispat yöntemi oluştururlar. Ve fakat bir karar yöntemi öğrenmedik. ϕ'yi ispatlamaya çalışıp da başaramazsak, bu başarızlığın yeterince uzun uğraşmamamızdan değil de ϕ'nin ispatlanamaz oluşundan kaynaklandığından emin olabileceğimiz bir aşama yoktur. Yüklemler dizgesinde geçerli olan cümlelerin kümesi için niçin bir karar yöntemi bulamadığımızın açıklaması, böyle bir karar yöntemi düzenleyecek kadar zeki olmadığımızdan daha fazlasını gösterir: ortada elde edilebilecek bir karar yöntemi zaten yoktur. Bu Alonzo Church ve Alan Turing tarafından kanıtlanmıştır:

Church-Turing Teoremi. Yüklemler dizgesinde geçerli olan cümlelerin kümesi için bir karar yöntemi yoktur.

Ne harikulade bir sonuç! Yüklemler dizgesinde geçerliliği denetlemek için bilinen bir yöntem olmadığını belirtmek marifet değildir; bu sadece geçerlilik için bir denetleme aracı bulma probleminin çözülmemiş olduğu anlamına gelir. Ama Church-Turing teoremi bize bundan çok daha fazlasını söyler. Bize söylediği, hiçbir zaman, uzak gelecekte bile, kimsenin asla yüklemler dizgesinde geçerlilik için bir karar yöntemi keşfedemeyeceğidir.

Church-Turing teoremi, 1930'larda Turing, Gödel, Kleene, Church ve diğerlerinin, "Verili bir matematik problemi için hangi durumlarda bir çözüm algoritması vardır?" sorusu üzerine yaptıkları kapsamlı araştırmaların bir sonucudur. Yani, kusursuzca mekanik bir şekilde izlenebilecek ve belli bir kategorideki matematik sorularına her zaman doğru cevabı verebilecek apaçık bir kurallar sistemi hangi durumlarda bulunur? Bu araştırma oldukça verimli oldu. Öncelikle bu araştırma elektronik bilgisayarın geliştirilmesini önceledi ve kolaylaştırmıştır. Turing kalem ve kağıtla hesaplarken ne yapıyor olduğumuzun bir hayli basitleştirilmiş ve taslak bir modelini geliştirmiştir ve dijital bilgisayarları geliştirme sürecindeki ilk çalışmaların çoğu Turing'in modelini elektronik ortamda uygulamayı hedeflemiştir.

Bu araştırmaların matematikçi ve bilgisayar bilimcilerin ilgisini çekmesi şaşırtıcı değildir. Öncelikle, bu araştırmalardan önce, karar verilemez bir problemin, karar verilemez olduğunu gösterebilmenin bir yolu bulunmuyordu. Bu yüzden birisi "Filan şey için bir algoritma bul" biçimindeki bir problem üzerinde çalışıyor – ki pek çok önemli matematik problemi bu biçimdedir – ve aslında böyle bir algoritma bulunmuyorsa, bu kişi tüm kariyerini orada olmayan bir algoritmanın beyhude araştırmasına harcayabilirdi. Hesaplanabilirlik kuramının gelmesinden sonra bile bu hala mümkündü, ama problem üzerinde her iki uçtan birden çalışmayı sağlayan tekniklerin gelmesi bu ihtimali zayıflatı. Bir algoritma bulmaya çalışacak, bu işe yaramazsa böyle bir algoritmanın olmadığını ispatlamaya çalışacaktık.

Buna bir örnek Hilbert'in onuncu problemidir; David Hilbert tarafından 1900'de duyurulan, dünyanın çözülmemiş en önemli matematik problemlerinin meşhur listesindeki onuncu problem. Problem katsayıları tam sayı olan (birkaç değişken halindeki) bir polinomun hangi durumlarda bir tam sayı çözümüne sahip olduğunu bulmaktı. Tam katsayılarına ve tam sayı çözümlerine sahip olan polinomların kümesi için bir ispat yöntemi olduğu açıktır. Tek yapılacak olan, mümkün çözümleri çarparak ve toplayarak tek tek denetlemektir. Tam sayı çözümleri olmayan problemleri tanımlamak için bir yöntem olup olmadığı o kadar da açık değildir. Birçok parlak akıllı insan, bu probleme çok zamanlarını hasrettiler; ve 1970'de Yuri Matijasevic böyle bir algoritma olmadığını ispatlamak için hesaplanabilirlik kuramının (ya da adlandırıldığı üzere *yineleme kuramı*nın) yöntemlerini uygulamasaydı, bu insanlar hala uğraşıyor olacaklardı.

Şimdi, yineleme kuramının felsefecilerin de ilgisini çekmesi gerektiğine ilişkin bazı nedenler göstereyim.

Yineleme kuramı, bir hesaplama makinesiyle çözülebilen problemlerle ilgilenir. Nedir bir hesaplama makinesi? Hangi malzemeden yapılmış olduğunun bir önemi yok. Tinkertoys® tarafından, nakış ipliğinden ya da hayvan bedeninden yapılmış olabilir. Önemli olan nasıl düzenlendiğidir. Aygıt, tamamen mekanik bir adımlar dizisiyle girdilerden çıktılara ilerlemek zorundadır; şeytani etkiler altında işleyen bir IBM bilgisayar, hesaplama makinesi sayılmayacaktır. Felsefece ilginç olan sav şudur ki biz kendimiz de hesaplama makinesi sayılmalıyız. Girdilerimiz duyu uyaranları, çıktılarımız da davranışlardır. Davranışlarımızı üreten kimyevi ve elektrik süreçler, bir silikon çip üzerinde meydana gelenlerden farklı türde olmayan, basit tabii süreçlerdir. Bu nedenle çözebileceğimiz her problem karar verilebilir olacaktır.[1]

Bu gözlem, içeriği bakımından bütünüyle soyut değildir. Zihnin bilgisayar modelleri yakın zamandaki psikoloji ve zihin felsefesinde önemli hale gelmiştir.

[1] Muhtemelen, tek başına uyaranlarımız, davranışlarımızı belirlemez gibi görünüyor; bunların yanı sıra içerilen şans faktörleri de söz konusu. Ama bu bir fark yaratmaz, çünkü bu, aynı problemlerin belirlenimci hesaplama makineleriyle çözülebileceği gibi belirlenimci olmayan makinelerle de çözülebileceği anlamına gelir.

Yineleme kuramı bir kural ya da bir kurallar sistemine uyarak çözülebilir olan problemlerle ilgilenir. Özel olarak, bir dildeki uzlaşımlar, o dilin kullanımının kurallarıdır, bundan dolayıdır ki insan dili, yineleme kuramının uygulanabileceği türde bir kurallı davranıştır.

Buradan hareketle, İngilizce konuşan bir çocuk hangi İngilizce söz dizilerinin İngilizce cümleler olduğunu söylemesini sağlayan bir kurallar sistemini öğrenirse, ki bu mümkün görünmektedir, o zaman İngilizce cümleler kümesi karar verilebilir bir küme olmak zorundadır. Bu fikir, bir doğal dilin dilbilgisinin neye benzeyeceğine ilişkin anlamlı kısıtlamalar getirir.

Wittgenstein'ın hiç bıkmadan ifade ettiği gibi, bir kelimenin anlamını öğrendiğimizde onu nasıl kullanacağımızı da öğreniriz.[2] Yani kelimenin kullanımını belirleyen bir kuralı öğreniriz. Bu nedenle bize, bir kurala uyarak neyi yapabileceğimize ilişkin sınırlamalar getiren bir kuram, aynı zamanda kelimelerin anlamlarının yapısına da sınırlamalar getirir.

Bilhassa, aritmetik öğrenirken, öğreniyor olduğumuz şey büyük olasılıkla rakam dilinin kullanım kurallarıdır. Bunun taii alternatifi olan açıklama, yani çocuğun, aynen “anne” ve “ördek” kelimelerinde olduğu gibi, “üç” kelimesini öğrenirken aslında üçü her gördüğünde teşhir etmeyi öğrendiği iddiası abese kaçacak gibi görünür. Fakat aritmetik öğrenmek gerçekten dil kuralları öğrenmeye dayalıysa, öyle görünüyor ki bu kuralların neler olduğunu saptayabilmek, sonra da bir cümle bu kurallara uyularak üretilebilir ise, ve ancak böyleyse, bir aritmetik doğrusu olarak tanınabilir diyebilmek zorundayız. Ama işin doğrusu bunu yapamayız. Birazdan ele alacağımız Kurt Gödel'in derin teoremi de, her kural sistemi için ya kuralların bir sonucu olan yanlış bir aritmetik cümle bulunduğunu ya da kuralların bir sonucu olmayan doğru bir aritmetik cümle bulunduğunu gösterir. Daha da kötüsü: aritmetik doğrularını üretmek için belirleyebileceğimiz her kural sistemi için, kuralların sonucu olmayan, ama doğru kabul edebileceğimiz bir aritmetik cümle bulunacaktır.

Gödel'in teoremi aksiyomatik yöntemin gücüne önemli sınırlar getirir. Gödel'in teoreminden önce genel olarak varsayılan, matematik bilgimizi matematik aksiyomlarının sonuçlarını çekip çıkartarak edindiğimizdi. Aksiyomlarsa geleneksel olarak aşikar doğrular kabul edilmiştir; Ökliddışı geometrinin gelişinden sonraysa matematikçinin işinin aksiyom sistemlerinin doğru olup olmadığıyla ilgilenmeksizin sadece bu sistemlerin sonuçlarını açıp dökmek olduğu kabulu yaygınlaşmıştır, Gödel'in teoremi, bu geleneksel açıklamanın matematik epistemolojisiyle ilgili söylenebilecek her şeyi kapsayamadığını gösterir. Aksiyomları nasıl deyimleştirdiğimizin kesin ayrıntıları önemli değildir. Sayı kuramının aksiyomlarını nasıl deyimleştirirsek deyimleştirelim hepsinin doğru olduğunu

[2] Şu da olabilir: “ördek” kelimesini öğrenirken aslında öğreniyor olduğumuz şey kelimeyi bir tür tümel ördeklikle eşleştirmektir. Ne var ki bu, metafizik bakımından doğru olacaksa bile, kelimeyi gerçekten nasıl öğrendiğimiz söz konusu olduğunda değersizdir, çünkü anne babamız bize “ördek”i öğretirken, anıan tümele işaret ederek kelimeyi tekrar etme yoluna gitmediler.

görebildiğimiz sürece bunlardan türetilebilir olmamakla birlikte doğru olarak tanınabilecek başkaca cümleler bulunacaktır.

Gödel'in teoremi, "Matematiğin terimleri, anlamlarını nasıl kazanırlar?" sorusuyla ilişkilendirildiğinde bilhassa kaçınılmaz hale gelir. Öyle görünüyor ki cevap "Terimlerin anlamları matematik kuramı tarafından belirlenir" gibi bir şey olmalıdır. Bu, beklenen cevabın tamamı olamaz, çünkü matematik terimlerinin sayma ve ölçme gibi faaliyetlerde kullanılışını da hesaba katmamız gerekir; fakat bu faaliyetler terimlerin anlamlarını saptamakta pek de başarılı olamaz. Sayıların isimleri için kesin olarak sahip olmadığımız her ne ise, bu, köpeklerin isimleri için sahip olduğumuz şeyin mukabilidir: Fido'yla girdiğimiz neden-etki ilişkisi, "Fido" isminin anlamını saptamamıza yardımcı olur. Neden-etki ilişkilerinin yokluğunda terimlerin anlamlarını saptamak için geriye kuramdan öte pek bir şey kalmaz. Ne var ki kuram, anlamları saptayamaz, çünkü

$\boldsymbol{\phi}$ ise, ve ancak böyleyse, $\ulcorner\boldsymbol{\phi}\urcorner$ doğrudur

$\neg\boldsymbol{\phi}$ ise, ve ancak böyleyse, $\ulcorner\boldsymbol{\phi}\urcorner$ yanlıştır

karşılıklı-koşullularından her cümlenin ya doğru ya da yanlış olduğu sonucu çıkmakla birlikte, hala kurama göre doğru da yanlış da olması mümkün cümleler vardır. Bu uyuşmazlık bazı felsefecileri matematiksel kuşkuculuğa sürüklemiştir.

Gödel'in sonucunun yakın bir akrabası da Tarski'nin şunu bildiren teoremidir: aklıselimin, doğruluk mefhumunu uygun bir şekilde anladığı kabul edilirse, bir dilde, o dil için bir doğruluk kuramı geliştirmemiz mümkün olmayacaktır. Bunun yerine, bir **L** dili için doğruluk kuramı, **L** "den anlatım gücü bakımından aslen daha zengin bir *üstdil* içinde geliştirilmelidir. Bu vargının felsefi sonuçları sarsıcıdır. Çünkü bu demektir ki anlatım gücü bakımından İngilizce'den daha zengin herhangi bir üstdile sahip olmadığımızdan, İngilizce için (veya herhangi bir doğal dil için) bir doğruluk kuramı veremeyiz. Hatta, dil hakkında konuşurken kullandığımız dilin kendisi dil araştırmasının menzilini aştığından, söz konusu vargı şunu da gerektirir: tabiatı, insan dilini, ve insan düşüncesini birleşik bir bütün halinde kavrayacak olan birleşik bir tür bilim elde etmek imkansızdır.

Felsefecilerin yineleme kuramına ilgi duymaları gerektiğinin epey farklı bir diğer nedeni de şudur: Eflatun'dan beri felsefeciler, zor veya zahmetli bir terimin anlamının basit, daha açık ve daha iyi anlaşılan başka terimler bakımından açıklandığı *çözümlemeler* yapmaya uğraşmaktalar. Örneğin,

...ise, ve ancak böyleyse, S için A'yı yapmak ahlaken doğrudur.

ifadesindeki boşluğu ahlaki terimler çevresi dışında bir şeyle doldurmaya.[3] "Mutluluk" ahlaki değerle yüklü olarak anlaşılmamak kaydıyla, şöyle bir şey kabul edilebilir olacaktır:

> A, S için elverişli olan mümkün eylemlerden en çok kişi için en büyük mutluluğa en fazla imkan tanıyanı ise, ve ancak böyleyse, S için A'yı yapmak (ahlaken) doğrudur.

olacaktır. Boşluğu doldurarak elde ettiğiniz karşılıklı koşullu, bir kavram doğruluğu olmalıdır. Doğruluğu bütünüyle arızi olan (ahlaken) doğru eylemler sınıfının bir nitelemesini versek, hatta verdiğimiz niteleme fiziki yasalılık düzeyinde olsa dahi, bir eylem için ahlaken doğru olmanın çözümlemesini yapmış olduğumuzu söylemeyiz. Zor bir kavramı, bir kavram çözümlemesi sunarak anlamaya çalışma tasarısı felsefi mirasımızın çok eski bir parçasıdır, ama bu neredeyse hiç de başarılı olmamış bir tasarıdır. Buna örnek olarak karar verilebilirliğin yineleme kuramından edindiğimiz çözümlemesidir. Yineleme kuramı, bize

> ...ise, ve ancak böyleyse, S'ye üyeliği denetlemek için bir algoritma vardır

biçiminde bir karşılıklı koşullu sunar, öyle ki koşulludaki boşluk, bir arı matematik ifadesi ile doldurulur. Dolayısıyla koşullardan biri yöntemler ve yetilerle ilgili bir önermeyken, öteki, yöntemler ve yetilerle hiç bir ilgisi olmayan bir önermedir – bu ikincisi öyle bir önermedir ki matematik doğrularını dolaysız sezgiyle tanıyan, hesaplamaların ve algoritmaların ne olduğuna dair hiçbir fikri olmayan bir tür üstün varlıklar ırkından[4] bile olsanız kavrayabilirsiniz. Dahası bu karşılıklı koşullu, doğru olduğu takdirde, yine bir kavram doğruluğu olacaktır. Sonuç olarak başarılı bir çözümleme yapmış oluruz.

Derdimiz kavram çözümlemeleri vermekse, halihazırda sahip olduğumuz birkaç başarılı çözümlemeye dikkatlice bakmamız iyi olur, çünkü başarıyı taklit etmeye çalışmak genelikle iyi bir stratejidir. Aynı yöntemlerin başka kavramları çözümlerken uygulanabilir olup olmadığını görmek istiyorsak, karar verilebilirlik için verdiğimiz başarılı çözümlemede hangi yöntemlerin kullanıldığına bakabiliriz. Bu, bize peşinde olduğumuz çözümlemeyi vermese bile birtakım faydalı bilgiler verebilir. Bize karar verilebilirliğin başarılı bir çözümlemesini sunan aynı çözümleyici tekniklere ahlaken doğru olma kavramının niçin gelmediğini anladığımızda, bu kavramın başarılı bir çözümlemesi önünde duran engellerin bazılarını görebileceğiz.

---

[3] "(Ahlaken) doğru"nun anlamını öteki ahlaki terimler üzerinden açıklarsak oldukça değerli ve faydalı bir şey yapmış olabiliriz, ama yaptığımız şey, geleneksel olarak çözümleme sayılan şey olmayacaktır. Çünkü geleneksel anlayışa göre, "(ahlaken) doğru" için verilen şey bir çözümleme olacaksa, bu, kelimenin anlamını, ahlaki sözdağarcığından tamamen yoksun birisine dahi açıklayabilecektir.

[4] Thomas Aquinas'a göre meleklerin durumu böyledir.

Aklıma gelmişken, bunun dışında bildiğim tek başarılı kavram çözümlemesi örneği ("Dişi tilkiler tilkilerin dişi olanlarıdır" türünden güzaflıkları bir yana bırakırsak) limit ve süreklilik kavramlarının **ϵ-δ** çözümlemesidir.