Konu 24.242. Mantık II. Dördüncü ödevden örnek problemler, son tarih 8 Nisan

Sınırlandırılmış önermeler dizgesi (SÖD), şöyle tanımlansın: SÖD bölümsüz cümleleri "A_0," "A_1," "A_2," vb.dir ve SÖD cümleleri, SÖD cümlelerinden, koşulluların (($\phi \to \psi$) biçimindeki cümleler) ve değillemelerin ($\sim\phi$ biçimindeki cümleler) oluşturulmasına yarayan işlemlerin bir veya daha çok kez uygulanmasıyla oluşturulmuş bölümsüz cümleler ve ifadelerdir. Bir *normal doğruluk ataması* (*NDA*), SÖD cümlelerini{0,1}'e götüren ve şu koşulları sağlayan bir ⍰ fonksiyonudur: her ϕ ve ψ için: ya $\mathfrak{I}(\phi) = 0$ ya da $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ ise (ya da her ikisi de), ve ancak böyleyse, $\mathfrak{I}((\phi \to \psi)) = 1$;$\mathfrak{A}(\phi) = 0$ ise, ve ancak böyleyse, $\mathfrak{I}(\sim\phi) = 1$. Bir SÖD cümlesi, kendine her NDA tarafından 1 değeri atanıyor ise, ve ancak böyleyse, bir *totoloji*dir.

Bir *SÖD türetimi*, her biri bir sonlu öncül kümesiyle eşleştirilmiş cümlelerin sonlu bir dizisidir.

(ÖS) ϕ, öncül kümesi{ϕ}şeklinde belirlenerek yazılabilir.

(KP) ψ, öncül kümesi Γ şeklinde belirlenerek yazılmışsa, öncül kümesi $\Gamma\sim\{\phi\}$ şeklinde olmak kaydıyla ($\phi \to \psi$) yazılabilir.

(MP) ($\phi \to \psi$), öncül kümesi Γ şeklinde belirlenerek, ϕ de öncül kümesi Δ şeklinde belirlenerek yazılmışsa, öncül kümesi $\Gamma \cup \Delta$ şeklinde olmak kaydıyla ψ yazılabilir.

(MT) ($\sim\phi \to \sim\psi$), öncül kümesi Γ şeklinde belirlenerek, ψ de öncül kümesi Δ şeklinde belirlenerek yazılmışsa, öncül kümesi $\Gamma \cup \Delta$ şeklinde olmak kaydıyla ϕ yazılabilir.

Aşağıdaki koşula uygun olarak, ϕ gibi her bir SÖD cümlesi ile bir $\ulcorner\phi\urcorner$ kod sayısını ilişkilendirme yoluyla SÖD'nin rakamlı kodlaması yapılır:

$\ulcorner A_i \urcorner$ = İkili(1,i).

$\ulcorner(\phi \to \psi)\urcorner$ = Üçlü(2,$\ulcorner\phi\urcorner$,$\ulcorner\psi\urcorner$) = İkili(2,İkili($\ulcorner\phi\urcorner$,$\ulcorner\psi\urcorner$))

$\ulcorner\sim\phi\urcorner$ = İkili(3,$\ulcorner\phi\urcorner$)

1. Aşağıdaki cümlenin öncüller boş kümesinden türetimini verin:

   (a) $((A_0 \to A_1) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_0 \to A_2)))$

2. SÖD cümlelerinin kodları kümesinin Σ'da olduğunu gösterin. (Burada ilk unsurları kullanan yazımı sonuna kadar kullanmak zorunda değilsiniz; uygun kısaltmalardan faydalanabilirsiniz.)

Not: Benson Mates'in kitabı *Elementary Logic*'te, bir SÖD cümlesinin, bir totoloji olduğunda, ve ancak böyle olduğunda, boş kümeden türetilebilir olduğunun ispatını bulabilirsiniz. Bu gözlemi, problem 4 ve 5'in sonuçlarıyla birleştirdiğimizde, totolojilerin kod sayıları kümesinin Δ olduğu sonucuna varabiliriz. Bu, önermeler dizgesiyle ile yüklemler dizgesi arasındaki çarpıcı bir farklılıktır. Yakında ispat edeceğimiz *Church Teoremi*, yüklemler dizgesinde geçerli olan cümlelerin kümesinin Σ olmasına rağmen Δ olmadığını söyler.