15.433 YATIRIM

Ders 6: CAPM ve APT

Bölüm 1: Teori

Bahar 2003

Giriş

Şimdiye kadar riskli varlığın beklenen getirisini veri olarak kabul ettik. Fakat beklenen getiri nereden geliyor?

Yatırımcıların riskten kaçındığı sezgisine dayanarak, bunun bir açıklaması risk priminin -riskten arındırılmış oranın üzerinde bir getiri- risk almak için ödenen bir ödül olduğudur.

Bu, mantıklı geliyor mu?

Sermaye Varlıkları Fiyatlandırma Modeli (CAPM), risk ve ödül hakkında düşünmemiz için bize basit ama zarif bir model sunuyor.

“CAPM”

Piyasa dengesinde yatırımcılar sadece sistematik riski -çeşitlendirmesi mümkün olmayan risk- almak için ödüllendirilir.

Özel durumlarla ilgili riskler için ödüllendirilmemelidir çünkü bu belirsizlik, uygun bir risk çeşitlendirmesi ile ortadan kaldırılabilir.

CAPM Modelinde Sharpe Oranı

CAPM'in yaratıcılarından biri olan Bill Sharpe, Dow Jones Varlık yöneticisine verdiği bir mülakatta şunları ifade etmiştir:

“Fakat değişmeyen temel düşünce, sadece risk almak için ödül verilmesini beklemenin mantıklı olmadığıdır. Aksi takdirde, Las Vegas'ta çok para kazanabilirsiniz. Eğer risk için bir ödül varsa, bu çok özel olmalı. Arkasında ekonomik bir temel olmalı ya da dünya çok çılgın bir yer olmalı. Bu basit fikirler hakkında çok da farklı düşünmüyorum.”

Sharpe (1998)

Varsayımlar

1. Mükemmel Piyasalar

- Tam Rekabet- her yatırımcı hisse senedi fiyatları üzerinde bir etkisi olmadığını varsayar.
- Vergi yoktur.
- İşlem maliyeti yoktur.
- Tüm varlıklar kamuya açık olarak alınıp satılır, varlıklar mükemmel derecede bölünebilir.
- Açığa satış kısıtları yoktur.
- Borç alma ve borç vermede aynı risksiz oran kullanılır.

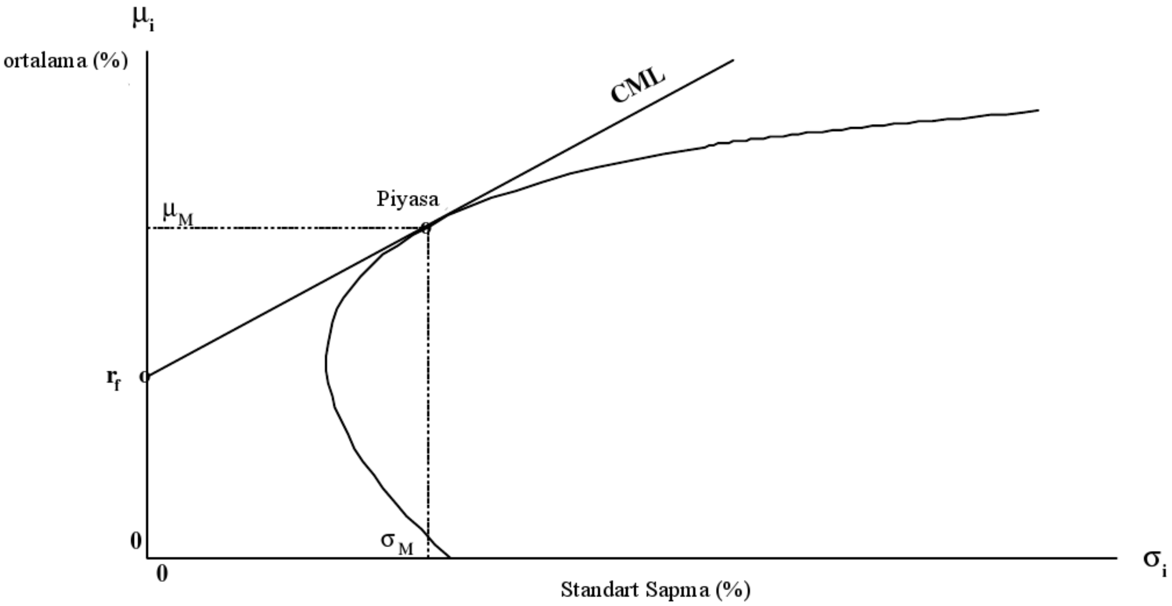
2. Benzer yatırımcılar

- Miyop [1]
- Bekletme süresi aynıdır.
- Normallik veya ortalama-varyans fayda.
- Homojen beklentiler.

[1] miyop:sıfat. uzağı göremeyen

Denge Piyasa Portföyü

Her yatırımcının aynı risksiz varlığın ve tanjant portföyünün bir kombinasyonunu tuttuğunu hatırlayın.



Bütün bireysel yatırımcıların portföylerini biraraya getirdiğimizde, borç verme ve borç alma birbirini götürecek, ve toplam riskli portföy ekonominin toplam servetine eşit olacaktır. Teğetlik portföyü, denge piyasa portföyü olmaktadır.

Riskin Piyasa Fiyatı

Ekonomide N sayıda ortalama-varyans yatırımcı var, her birinin \$1'ı var.

Yatırımcı	Riskten Kaçınma	Portföy Ağırlığı
1	A_1	$\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2 A_1}$
2	A_1	$\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2 A_2}$
3	A_1	$\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2 A_3}$
...	...	...
N	A_N	$\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2 A_N}$

Bütün yatırımcıları biraraya getirdiğimizde, piyasa portföyüne yatırılan toplam servet:

$$\$1 \cdot \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \ldots + \frac{1}{A_N} \right] \tag{1}$$

Dengede, piyasa portföyüne yatırılan toplam servet aşağıdaki ifadeye eşit olmalıdır:

$$\$1 \cdot N \tag{2}$$

Bu, şunu gösterir:

$$\mu_M - r_f = \sigma_M^2 \bar{A} \tag{3}$$

bu, piyasa katılımcıları arasında riskten kaçınmanın genel bir ölçüsünü verir:

$$\frac{1}{\bar{A}} = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \ldots + \frac{1}{A_N} \right] \tag{4}$$

Riskli Varlıkları Ayrı Ayrı Fiyatlandırma

Piyasa portföyü ayrı ayrı riskli varlıklardan oluşur:

$$r_M = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \ldots + w_N r_N \tag{5}$$

burada w_i, i varlığına yatırılan toplam piyasa servetinin oranını gösterir.

Riskli varlıklar dengede nasıl fiyatlandırılır?

Bu soruya cevap vermek için, i varlığına yatırılan denge miktarını, w_i, optimum düzeyinden biraz uzaklaştırır ve bu sapmanın yatırımcının maksimum faydasını nasıl etkilediğine bakarız.

Ortalama bir riskten kaçınma katsayısına sahip olan temsili bir yatırımcıya odaklanalım:

$$U(r) = E(r) - \frac{1}{2}\bar{A}\ var(r) \tag{6}$$

Bu yatırımcının tuttuğu portföy:

$$r = y^* \left(w_1^* r_1 + w_2^* r_2 + \ldots + w_N^* r_N \right) + (1 - y^*)\, r_f \tag{7}$$

Bu yatırımcı için y^* nedir?

Dengede, w_i bu yatırımcı için optimum çözümdür. Bu şunu ifade eder:

$$\frac{\partial U(r)}{\partial w_i} = 0 \tag{8}$$

Diğer herşey sabitken, w_i'yi biraz değiştirirsek ne olur?

$$\frac{\partial E\left(r\right)}{\partial w_i} = E\left(r_i\right) - r_f \tag{9}$$

$$\frac{\partial var\left(r\right)}{\partial w_i} = 2 \cdot cov\left(r_M, r_i\right) \tag{10}$$

Böylece:

$$E\left(r_i\right) - r_f = \bar{A}\ cov\left(r_M, r_i\right) \tag{11}$$

Şunu hatırlayın:

$$E\left(r_M\right) - r_f = \bar{A}\ var\left(r_M\right) \tag{12}$$

Bu bizi şu ifadeye götürür:

$$E\left(r_i\right) - r_f = \beta_i\left(E\left(r_M\right) - r_f\right) \tag{13}$$

burada

$$\beta_i = \frac{cov\left(r_M, r_i\right)}{var\left(r_M\right)} \tag{14}$$

Buradaki türetmemiz, ikinci dereceden bir fayda fonksiyonu kullanır. Genelde, ispatı, ortalama ve varyanstan kaçınma tercihini içeren bütün fayda fonksiyonları için aynıdır.

CAPM'de Risk ve Ödül

Riskli varlık, r_i için, ödüllendirilebilir riskin doğru ölçüsü onun varyansı (r_i) değil, piyasayla olan kovaryansıdır $(cov(r_i, R_m)$.

Piyasa riskine maruz kalmanın etkisi şu şekilde hesaplanabilir:,

$$\beta_i = \frac{cov\left(r_M, r_i\right)}{var\left(r_M\right)} \tag{15}$$

Piyasa riskine bir birim maruz kalınca, ödül piyasa ile aynıdır:

$$E(r_M) - r_f \tag{16}$$

Piyasa riskine β kadar maruz kalınca, ödül:

$$\beta_i \cdot \left(E\left(r_M\right) - r_f\right) \tag{17}$$

Piyasa riskine maruz kalınmıyorsa, varlığın ne kadar riskli olduğuna bakılmaksızın ödül sıfırdır. Özet olarak, CAPM'de risk ve ödül ilişkisi doğrusal bir ilşkidir.

Sistematik ve Duruma Göre Değişen Riskler

Her yatırım iki farklı risk taşır:

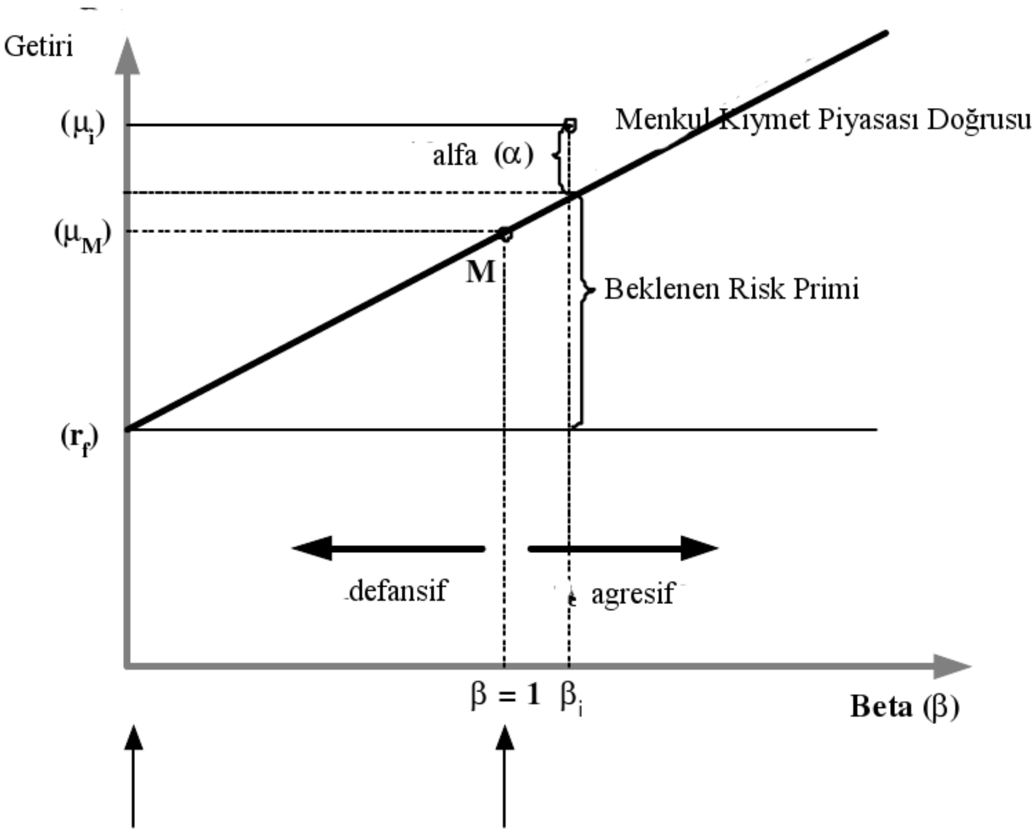
- *Sistematik risk* piyasa çapındadır ve neredeyse tüm hisse senedi fiyatlarını yaygın olarak etkiler.

  Örnekler, faizler ve iş çevrimleridir.

- *Duruma bağlı olarak değişen risk (Idiosyncratic risk)* tek bir menkul kıymete veya sınırlı sayıda menkul kıymete ait beklenmeyen olayları içerir.

  Örnekler, önemli bir ihalenin kaybedilmesi veya hükümet politikasında belli bir sektöre yönelik değişiklik.

Menkul Kıymet Piyasa Doğrusu



Sistematik ve Duruma Göre Değişen Riskler

Her yatırım iki farklı risk taşır:

- *Sistematik risk* piyasa çapındadır ve neredeyse tüm hisse senedi fiyatlarını yaygın olarak etkiler.

  Örnekler, faizler ve iş çevrimleridir.

- *Duruma bağlı olarak değişen risk (Idiosyncratic risk)* tek bir menkul kıymete veya sınırlı sayıda menkul kıymete ait beklenmeyen olayları içerir.

  Örnekler, önemli bir ihalenin kaybedilmesi veya hükümet politikasında belli bir sektöre yönelik değişiklik.

Doğrusal Bir Faktör Modeli

Bu iki çeşit riski açıklamak için kullanılan basit model doğrusal faktör modelidir:

$$r_i = E(r_i) + \beta_i \cdot F + \varepsilon_i \tag{18}$$

bu, iki riskli bileşene sahiptir:

- *sistematik* F: bütün menkul kıymetler için geçerlidir.
- *duruma bağlı* ε_i: sadece menkul kıymet i için geçerlidir.

Hem ortak faktör F, hem de duruma bağlı olarak değişen ε_i bileşeni ortalaması sıfır olan rassal değişkenlerdir.

Arbitraj Fiyatlama Teorisi

Tek Faktör Versiyonu

Vergilerin ve işlem maliyetlerinin olmadığı bir piyasa varsayalım. Varlıklar mükemmel derecede bölünebilir. Açığa satış kısıtları yok.

Tek faktörlü doğrusal bir model varsayın:

- β_i, i'lerin ortak faktöre olan hassasiyetini gösterir.
- F, ortak faktördür, $E(F) = 0$'dır.
- ε_i, ortalaması sıfır olan, ortak faktörden veya firmanın diğer duruma bağlı değişen bileşenlerinden bağımsız olan firmaya özel getiridir.

Olması muhtemel ortak faktör: enflasyondaki ve sanayi üretimindeki beklenmeyen değişiklikler vb.

Arbitraj Fiyatlama Teorisi:

$$\frac{E\left(r_i - r_f\right)}{\beta_i} = \frac{E\left(r_j - r_f\right)}{\beta_j} \tag{19}$$

Bir varlığın beklenen getirisi, onun ortak faktöre maruz kalması tarafından belirlenir ve duruma bağlı olarak değişen bileşenle hiçbir ilgisi yoktur.

APT'yi elde ederken, yatırımcıların tercihleri hakkında varsayım yapmaya veya varlık getirileri için özel bir olasılık dağılımı varsaymaya gerek yoktur.

APT bir denge kavramı değildir. Piyasa portföyünün varlığına bağlı değildir. Sadece arbitraj olmayan koşullara dayanır.

Özet

Dengede, tanjant portföyü piyasa portföyüdür. Piyasa portföyünün beklenen getirisi piyasadaki ortalama riskten kaçınma derecesine bağlıdır.

CAPM'in arkasında yatan: Riskli bir varlığın beklenen getirisi, onun β ile ölçülen piyasa riskine maruz kalmasına bağlıdır.

Çeşitlendirme finansta önemli bir kavramdır. Büyük Sayların Kuvvetli Yasası adı verilen bir matematiksel araca dayanır.

CAPM'de olduğu gibi, APT'nin temel dayanağı, beklenen getirilerdeki farklılıkların çeşitlendirilemeyen risk tarafından belirlenmesi gerektiğidir.

Odak Noktası:

BKM Bölüm 9-11

- s. 263-284 (CAPM, varsayımlar, beta, likidite, kovaryans, beklentiler, SML, zero-beta modeli, alpha)
- s. 287 (Denklem 10.5, denklem 10.6 ve denklem 10.7)
- s. 300-308
- s. 308-313 ortası (denklem 10.15, denklem 10.16)
- s. 324-334 ortası (Çeşitlendirme, denklem 11.2, APT ve CAPM, çok faktörlü APT, denklem 11.5, denklem 11.6)

Okuyun: Roll and Ross (1995)

Potansiyel Soru Çeşitleri: Bölüm 9 kavram bilgisi soruları 1, 2, 3, s. 286 ff. soruları 1, 4, 17, 22, 23, 25. Bölüm 10 kavram bilgisi soruları 1, 2, 3, 4, s.314, ff. soruları 4, 5, 6, 7, 18, 19. Bölüm 11 kavram bilgisi soruları 2, 3, 4, 5, s.335 ff.sorular 3, 5, 7, 10, 16.

Bir Sonraki Ders İçin Sorular

Lütfen Okuyun:

- BKM Bölüm 13,
- Jagannathan ve McGrattan (1995),
- Kritzman (1993),
- Kritzman (1994)

Aşağıdaki sorular üzerinde düşünün:

- CAPM'in öngörüleri nelerdir?
- Bu öngörüler test edilebilir mi?
- Regresyon ne demektir?
- t-testi ne demektir?

TEKNİK NOTLAR: Çeşitlendirmenin Matematiksel Temeli

Çeşitlendirme kavramının arkasında, derin, zarif ve güçlü bir matematiksel araç var.

BÜYÜK SAYILARIN KUVVETLİ YASASI:

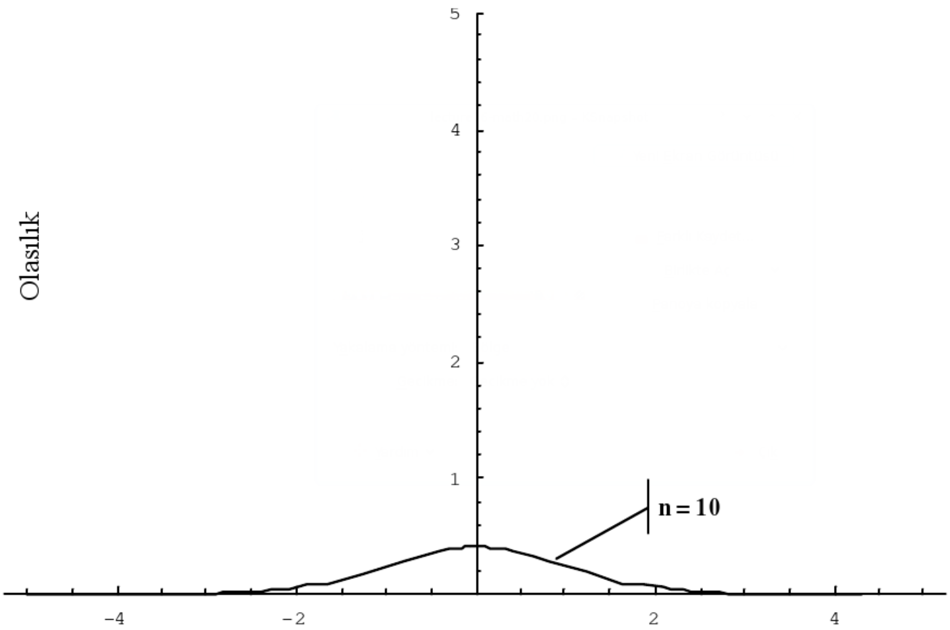
$x_1, x_2, ...$, benzer dağılan ortalaması μ olan bağımsız rassal değişkenler olsun.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} x_i = \mu \tag{20}$$

neredeyse kesin olarak.

Simulasyona Dayalı Bir İspat

BİRİNCİ AŞAMA: X_1 ile başlarız, onun standart normal dağıldığını varsayarız, ve onu 10.000 kere simule ederiz. 10.000 senaryoyu kullanarak, onun ampirik olasılık dağılımını çizeriz. Ampirik olasılık dağılımı, toplam olasılık bir olacak şekilde temel olarak 10.000 senaryonun histogramıdır. Notasyon olarak, $y_1 = x_i$ yazarız.

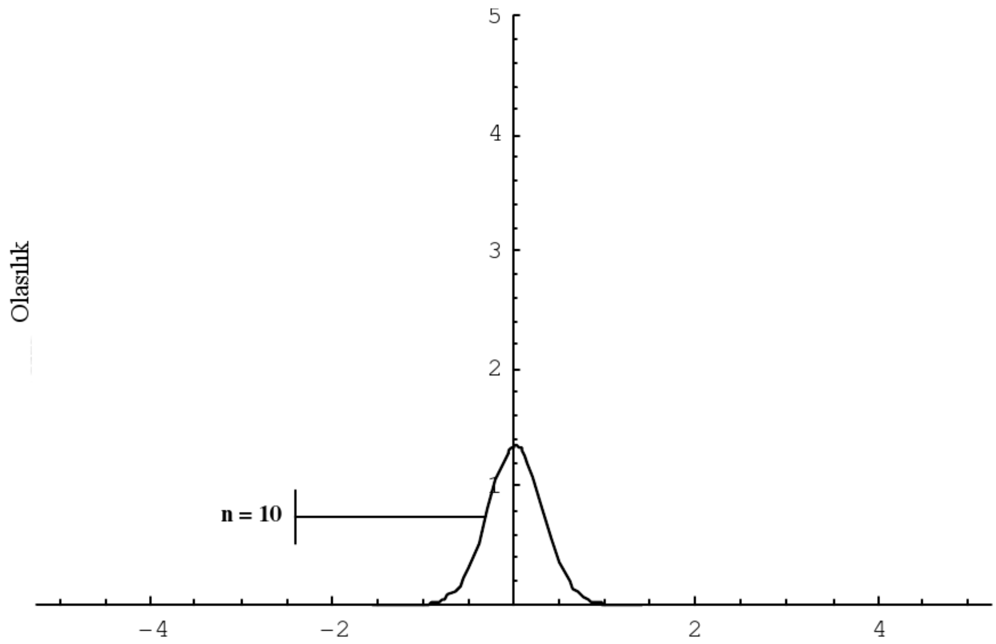


İKİNCİ AŞAMA: BİRİNCİ AŞAMA'yı, rassal sayı jeneratörümüzde her seferinde yeni bir çekirdekle, $x_1, x_2, .., x_{10}$, aslında bağımsız olacak şekilde 10 kere tekrarlarız. Bunları toplarız ve 10'a bölerek yeniden ölçeklendiririz. Yani, aşağıdaki gibi 10.000 senaryomuz var:

$$y_{10} = \frac{1}{10}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}\right) \tag{21}$$

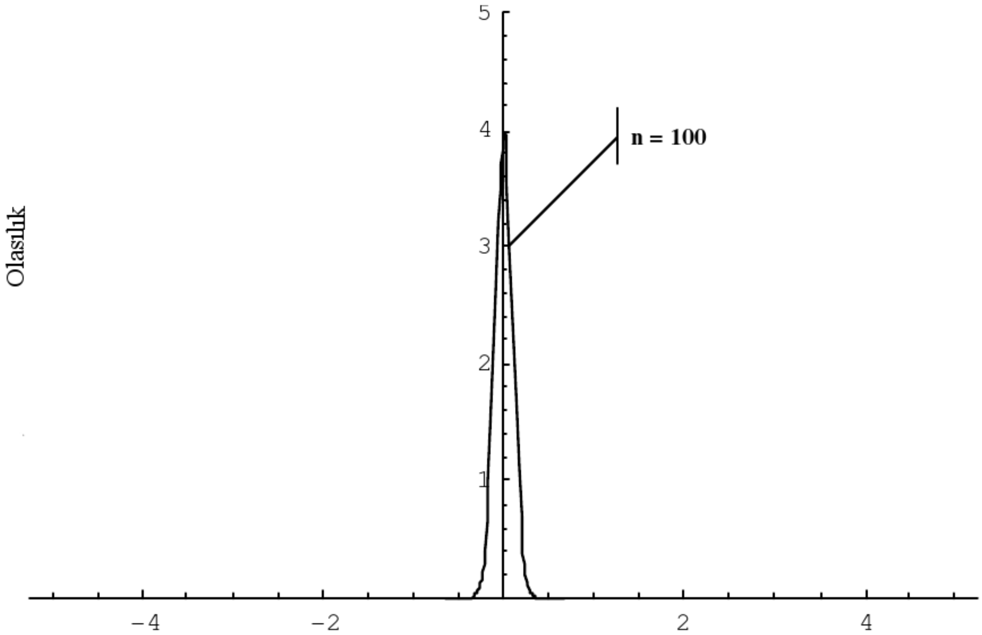
Sonra y_{10}'un ampirik olasılık dağılımını çizeriz:

Grafik:



ÜÇÜNCÜ AŞAMA: Son olarak, BİRİNCİ AŞAMAYI yüz kere tekrarlarız ve 10.000 senaryo elde ederiz:

$$y_{100} = \frac{1}{100}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}\right) \tag{22}$$



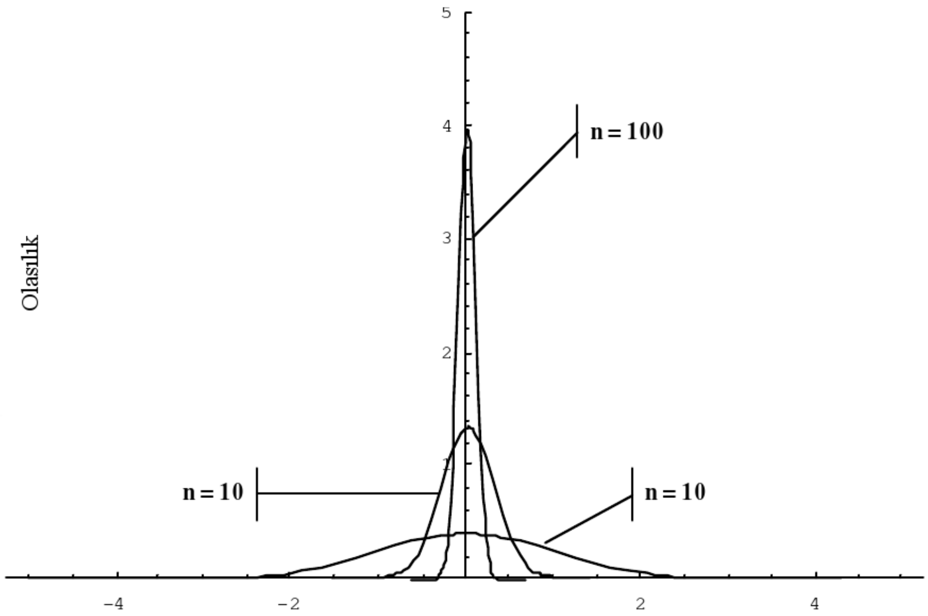
Büyük sayılar yasasına göre, N sonsuza kadar arttıkça,

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N} x_i \qquad (23)$$

bir olasılıkla sıfıra yaklaşır.

Normal dağılan x_i'ler için, bu ifadenin bir olasılıkla sıfıra yaklaştığını görmek aslına kolay çünkü:

$$var\,(y_N) = \frac{1}{N^2}\sum_{i-1}^{N} var\,(x_i) = \frac{1}{N} \qquad (24)$$



Olasılık
n = 100
n = 10
n = 10
5
4
3
2
1
−4
−2
2
4