15.433 YATIRIM

Ders 5: Portföy Teorisi

Bölüm 3: Optimum Riskli Portföy

Bahar 2003

Giriş

- Riske maruz kalmanın etkisine karar verdikten sonra, yatırımcının sonraki işi riskli portföyü, r_p oluşturmaktır.
- Bu seçim, yatırım için mevcut olan bütün riskli varlık evreninden yapılacaktır.

Riskli Varlıklar Evreni Ne Kadar Büyüktür?

Heyecanlı bir dönemde, genişleyen yatırım ortamında yaşıyoruz. Burada, RiskMetrics© tarafından yayınlanan enstrümanların listesi var. (Kaynak: *RiskMetrics^{T}M-Teknik Belge*).

- Hisse Senedi Endeksleri: 31 Ülke
- Döviz Kurları: 31 para birimi
- Tüm dünyada para piyasaları: 111 ülke
- Tüm dünyada swap anlaşmaları: 121.
- Tüm dünyada hazine tahvilleri: 153.
- Emtialar: 33

400'ten fazla enstrüman!

Bu liste tek tek hisse senetlerini, yatırım fonlarını, risk sermayesi fonlarını, future, option ve diğer türev araçlarını içermiyor…

İki Adet Riskli Varlık

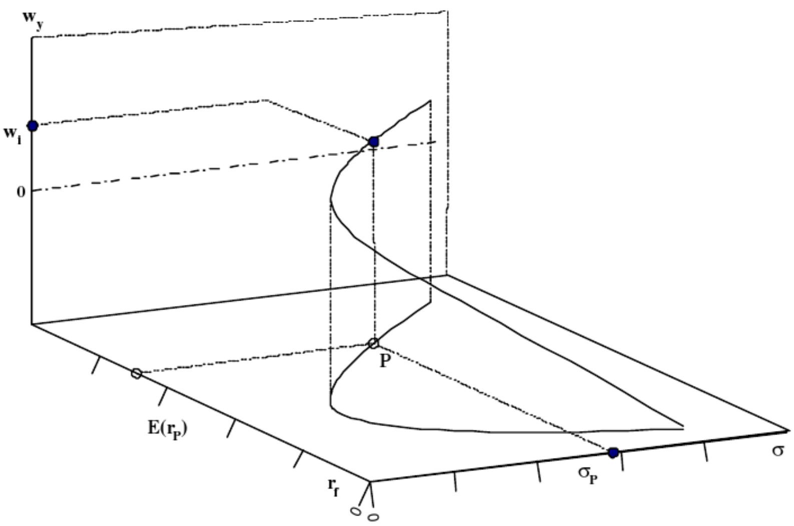
1. r_1 $\mu_1 = \%13, \sigma_1 = \%20$

2. r_1 $\mu_2 = \%8, \sigma_1 = \%12$

3. İlintili getiriler: $\rho = corr(r_1, r_2) = \%30$

Riskli Varlıkları Karıştırmak

- servetin w kadar kısmı hisse senedinde
- servetin $1 - w$ kadar kısmı borç enstrümanında
- riskli portföyde $r_p = w.r_1 + (1 - w).r_2$



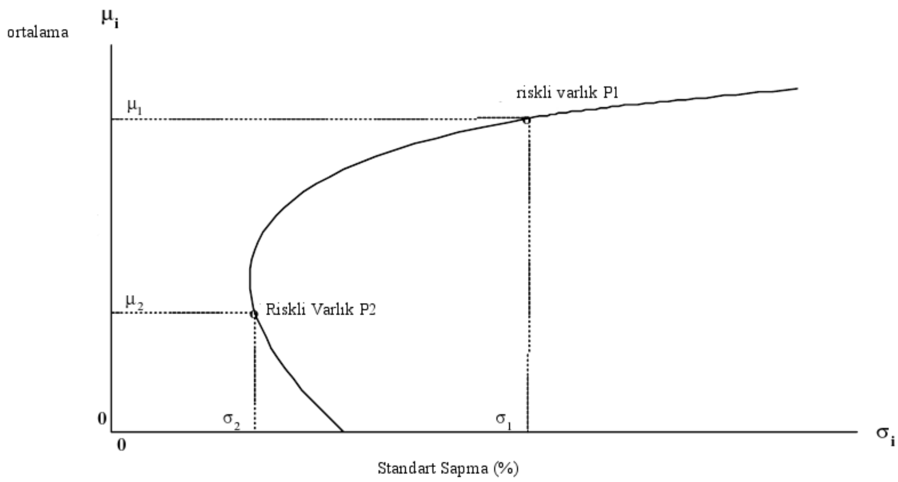
Riskli Portföyler

Önce riskli portföyün ortalamasını ve varyansını hesaplayalım:

$$\mu_P = w \cdot \mu_1 + (1-w) \cdot \mu_2 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot cov\,(r_1, r_2) & (2) \\ &= w^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_1 \sigma_2 \rho_{1,2} & (3) \end{aligned}$$

Ortalama-standart sapma uzayında:



Optimum Portföy Problemi

yatırım fırsatı

- bir risksiz varlık, r_f
- iki adet riskli varlık, r_1 ve r_2

ortalama-varyans yatırımcı

$$U(r) = E(r) - \frac{1}{2} \cdot A \cdot var(r) + \frac{1}{6} \cdot B \cdot E(r - E(r))^3 \tag{4}$$

yatırım kararları:

1. risk etkisini seç:

Riskli portföy r_p'de y, ve risksiz portföy,r_f'de $1 - y$ kadar bulundur.

2. Doğru olan riskli portföyü seçin, r_p:

r_1'de w, ve r_2'de $1 - w$ kadar bulundurun.

Mümkün olan portföyler:

$$r_{y,w} = (1 - y) \cdot r_f + y \cdot (w \cdot r_1 + (1 - w) \cdot r_2) \tag{5}$$

optimum portföy:

$$\max_{y \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}} U(r_{y,w}) \tag{6}$$

Ayırma İlkesi

Şimdiki problemimiz, yatırımcının riske maruz kalmasını kontrol eden seçim değişkeni y'ye ek olarak, riskli varlıkların doğru karışımını kontrol eden seçim değişkeni, w'yi de içerir.

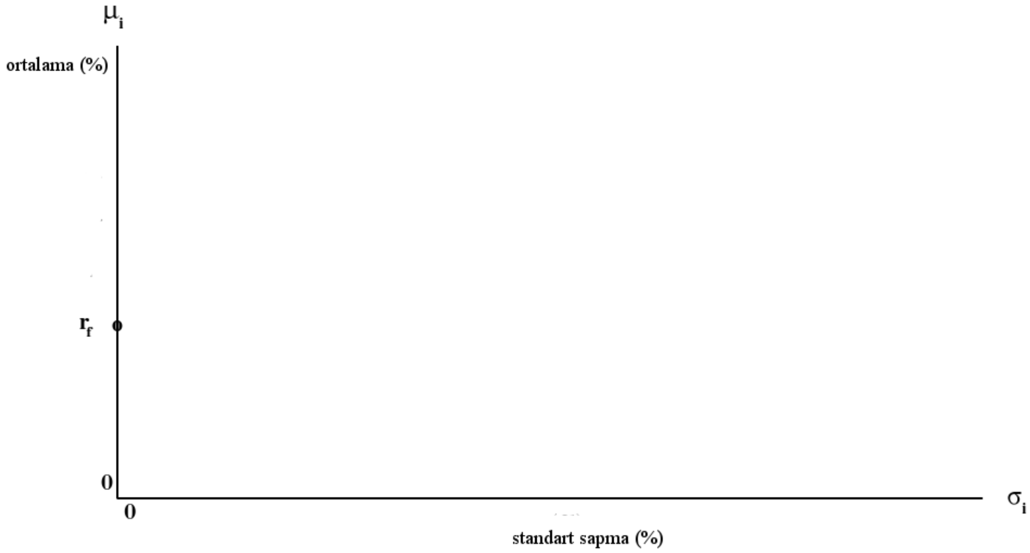
Komplikasyon: Optimizasyon probleminde y ve w'yu aynı anda çözmek gerek.

$$\max_{y \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}} U\left(r_{y,w}\right) \tag{7}$$

Çözüm: Ayırma İlkesi (James Tobin, 1958):

- Risk etkisini gösteren y'nin seçimi riskten kaçınma oranına bağlı olarak yatırımcıdan yatırımcıya değişebilir.
- Optimum riskli portföyü gösteren w'nun seçimi ise bütün yatırımcılar için aynıdır.

CAL Modelinin Kısa Bir Tekrarı

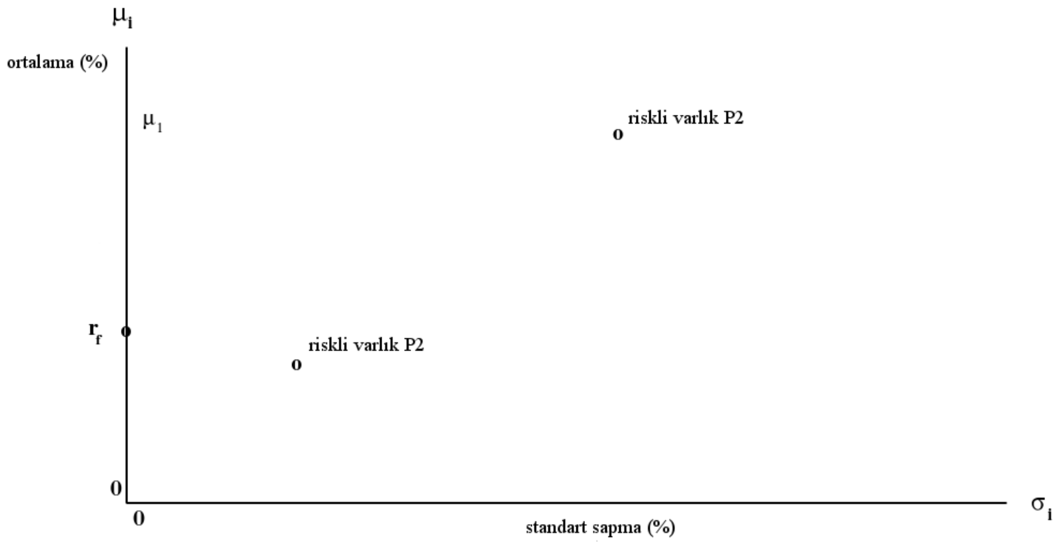


Riskli bir portföy seçin, r_p, servetinizin y kadar kısmını ona yatırın, geri kalanını da risksiz portföy r_f'ye yatırın.

Mümkün olan (E-Std) kombinasyonları nelerdir?

$$E\left(r_y\right) - r_f = \frac{E\left(r_y\right) - r_f}{std\left(r_p\right)} std\left(r_y\right) \tag{8}$$

Sharpe Oranının Kısa Bir Tekrarı

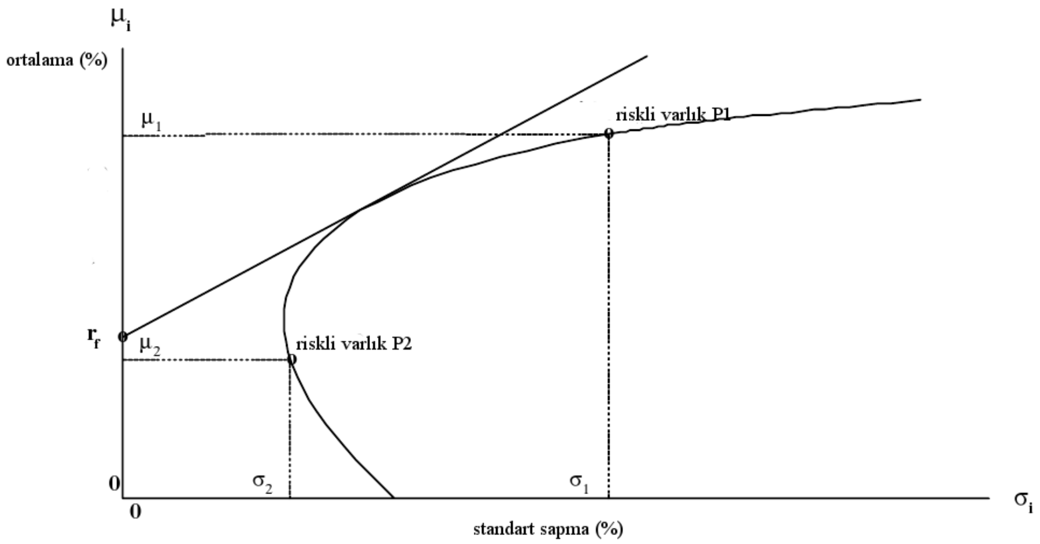


Bir portföyün, r, çekiciliğinin bir ölçüsü onun Sharpe oranıdır:

$$S = \frac{E(r) - r_f}{std(r)} \tag{9}$$

Bunun grafiksel yorumu nedir?

Optimum Riskli Portföy



Herbir CAL eğimi tarafından belirlenir.

En iyi CAL, eğimi en dik olandır, ya da en yüksek Sharpe Oranına sahip olandır.

Optimum Riskli Portföy Tanjant Portföyüdür: Bu, en yüksek Sharpe oranına sahip olan yegâne portföydür.

Kavramsal olarak, Optimum Riskli Portföy tanımının herhangi bir bireysel yatırımcının riskten kaçınma derecesini içermediğine dikkat etmek önemlidir.

İdeal bir dünyada, riskten kaçınma düzeyine bağlı olmaksızın her yatırımcı en iyi CAL'ı seçecek ve servetini optimum riskli portföy arasında bölüştürecektir.

Ancak, 3. derste anlatıldığı gibi, optimum riskli portföye yatırılan y miktarı, her yatırımcının riksten kaçınma derecesine bağlı olarak değişecektir.

Ancak gerçekte, farklı yatırımcılar kendilerinin optimum risk portföyleri hakkında farklı fikirlere sahip olabilirler. Neden?

Birden Çok Sayıda Riskli Varlık

İki riskli varlık tarafından oluşturulan fırsat kümesi son derece basittir. Birden çok sayıda riskli varlık durumuna genelleştirme yaptığımızda, fırsat kümesi önemli derecede daha karmaşık olur. Diyelim ki rassal getirileri $r_1, r_2, .., r_3$ olarak gösterilen n sayıda menkul kıymetimiz var.

Her zaman olduğu gibi, bu n menkul kıymeti karıştırarak portföyler oluşturuyoruz:

$$r_p = w_1 \cdot r_1 + w_2 \cdot r_2 + \cdots + w_n \cdot r_n \tag{10}$$

burada w, toplamı 1 eden portföy ağırlıklarını gösterir.

Seçilen her w şu özelliklere sahip yatırım fırsatını gösterir:

$$\begin{aligned}
E\left(r_p\right) &= \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E\left(r_i\right) && (11) \\
var\left(r_p\right) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i \cdot w_j \cdot cov\left(r_i, r_j\right) && (12) \\
cov_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(r_i - \bar{r}_i\right) \cdot \left(r_j - \bar{r}_j\right) \qquad \text{eşit ağırlıklı} && (13) \\
cov_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} p_t \cdot \left(r_i - \bar{r}_i\right) \cdot \left(r_j - \bar{r}_j\right) \qquad \text{olasılık ağırlıklı} && (14)
\end{aligned}$$

Bu, muazzam bir serbestlik derecesine ve zengin bir fırsat kümesine yol açar. Tabii ki, fırsat kümesindeki tüm portföyler iyi değildir.

Ortalama-varyans sınırını oluşturmak: Hedeflenen getiri oranı için mümkün olan en düşük riski sağlayan etkin portföyler kümesidir.

Uygulamada Optimum Portföy

Ayırma ilkesinin gösterdiği: Bir portföy yöneticisi aynı riskli varlığı bütün müşterilerine sunar.

Uygulamada, farklı yöneticiler bütün finansal varlıklar evreninde farklı alt kümelere odaklanırlar, farklı etkin sınırlar oluştururlar ve müşterilerine farklı "optimum" portföyler sunarlar. Neden?

Portföy seçimi teorisi bir çok basit varsayıma dayanır:

- Piyasada friksiyon yoktur (vergi, işlem maliyeti, finansal varlıkların sınırlı olarak bölünebilmesi, piyasa ayrışması).
- Yatırımcılar farklı değildir (örneğin, zengin-fakir, bilgi sahibi olan-bilgi sahibi olmayan, genç-yaşlı).
- Beklenen getiriler ve varyans statiktir -getirilerin ve oynaklığın önceden tahmin edilmesi mümkün değil (örneğin, finansal analistler, muhasabe bilgisi, makroekonomik değişkenler yatırım kararlarında önemli bir rol oynamazlar).

Gerçeklik için bir sonraki aşamamız (19 ve 20. Dersler): Aşağıdaki iki düşünceyi birbirine bağlamak.

- Menkul Kıymetler Analizi: öznel, eleştirel
- Portföy Seçimi: nesnel, istatistiksel.

Düşünmek için bazı sorular:

- Menkul kıymet analizi portföy performansını iyileştirebilir mi?
- Analistlerin fikirleri menkul kıymet seçimini nasıl etkiler?

Çeşitlendirme İle İlgili Arasöz

Çeşitlendirme evrensel bir kavramdır. En basit ifadeyle bir kişi bütün yumurtaları aynı sepete koymamalıdır.

Yatırım bağlamında, çeşitlendirme, bütün yatırımı tek bir varlığa yapmak yerine birden çok sayıda riskli varlığa yapmak anlamına gelir.

Sosyal bilimlerde bireylerin "rasyonel" olduklarına inanılır. Böyle bir problemi azaltmanın bir yolu, kararın birden çok sayıda kişi tarafından alınmasıdır.

Örneğin, jimnastik veya figürlü buz pateni müsabakalarında, puanlar, uç değerler çıkarıldıktan sonra, birden çok hakem için ortalama olarak hesaplanır.

Çeşitlendirmenin matematiksel temeli:büyük sayıların kuvvetli kanunu!

BKM, s. 299 ff.
299 f.

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{\varepsilon_p} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{1}{n}\sigma^2_{\varepsilon} && (15)\\
\beta_p &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cdot\beta_i && (16)\\
\alpha_p &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cdot\alpha_i && (17)\\
\varepsilon_p &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cdot\varepsilon_i && (18)\\
\sigma^2_p &= \beta^2_p\sigma^2_M + \sigma^2_{\varepsilon_p} && (19)
\end{aligned}
$$

Okumalar

Peter Bernstein'in Capital Ideas kitabının 3. bölümü "Interior Decorator Fallacy".

Odak Noktası:

BKM Bölüm 8

- s. 210-213 (denklem 8.2, denklem 8.4., tablo 8.2)
- s. 217'nin ortası-229 (Markowitz, etkin sınır, ortalama-varyans)
- s. 234-239 (ayırma ilkesi, CAL)
- s. 188
- s. 191-195 arası (fayda fonksiyonu, fayda eğrileri, CAL)

Okuyun: Kritzman (1994)

Potansiyel Soru Çeşitleri: kavram bilgisi soruları 1, 2, 3, s. 286 ff. soruları 5, 11, 18

Bir Sonraki Ders İçin Sorular

Lütfen Okuyun:

- BKM Bölüm 9-11,
- Roll and Ross (1995), ve
- Kritzman (1991)

Aşağıdaki sorular üzerinde düşünün:

Ayırma ilkesine göre, riskten kaçınma derecesine bağlı olmaksızın her yatırımcı aynı riskli optimum portföyü oluşturur. Bunun bütün piyasa için sonucu ne olur? Diyelim ki piyasada I sayıda yatırımcı var. Her yatırımcı, i, bir riskten kaçınma katsayısına, A_j sahip ve optimum riskli portföye optimum düzeyde maruz kalıyor.

$$y_i^* = \frac{E(r_p) - r_f}{var(r_p) \cdot A_i} \tag{20}$$

Dengede, bütün yatırımcılar için y_j^*'leri topladığımızda, ne elde ederiz? (İpucu:Dengede arz talebe eşittir, yani borçlanma miktarı borç verme miktarına eşittir).