15.433 YATIRIM

Ders 4: Portföy Teorisi

Bölüm 2: Uzantılar

Bahar 2003

Giriş

- Daha uzun yatırım dönemine sahip bir yatırımcı hisse senedi piyasasına daha çok mu yatırım yapmalıdır?
- Dinamik yeniden değerlendirmenin değeri var mıdır?
- Piyasa çöküşleri yatırımcı davranışını ortalama ve varyans üzerindeki etkisi dışında nasıl etkiler?

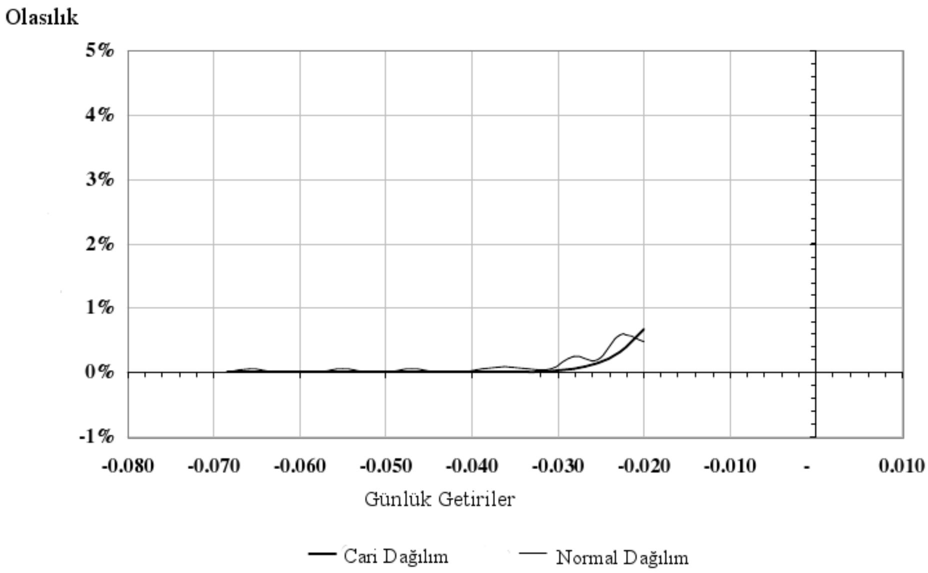
LTCM'de Birgün

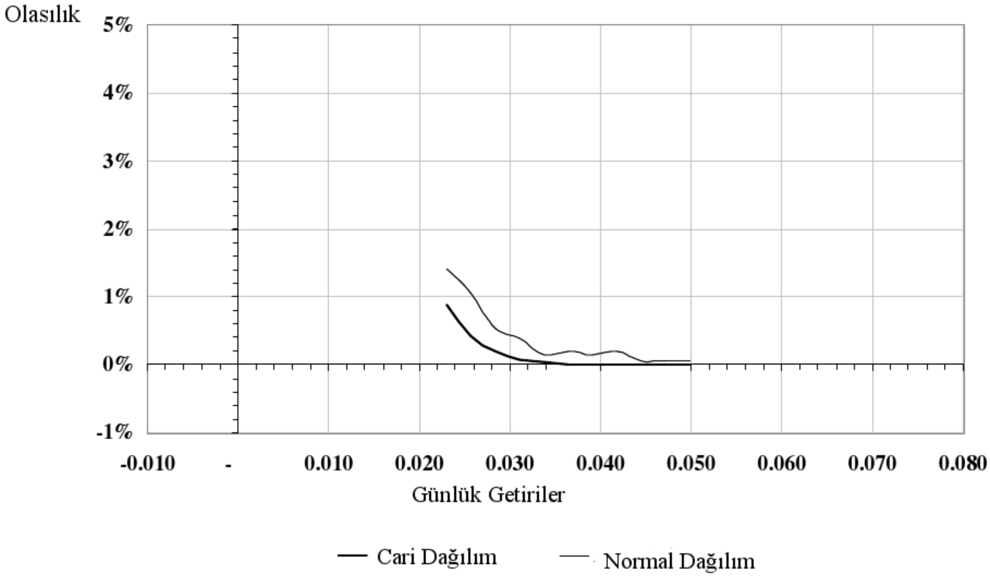
17 Ağustos 1998 tarihinde, Rusya iç borçlarını ödeyemedi. Greenwich, CT'de LTCM'de (Uzun Dönem Sermaye Yönetim Şirketi) 21 Ağustos Cuma günü:

"U.S. swap spread'lerinin kotasyonunu gördüğünde, ekranına şüpheyle baktı. Yoğun bir günde, U.S. swap spread'leri en fazla bir puan değişebilirdi. Fakat bu sabah, swap spread'ler 20 puan civarında dalgalanıyordu. " "O Cuma, nereye baksa parasını kaybetti. Kredi spred'leri en basitinden patladı. Her ne kadar bu hareketler mutlak değer bazında küçük görünse de, fonun kuvvetli kaldıraç düzeyi ve muazzam pozisyon büyüklüğü sebebiyle fon üzerindeki etkisi büyüktü." "Matematiksel bir kesinlikle bir günde $35 milyondan fazla kaybetmeyeceğini hesaplayan Uzun Dönem Sermaye Yönetimi Şirketi (LTCM), Ağustos'un o Cuma'sında $553 milyon kaybetti."

Roger Lowenstein, "Dahi Başarısız Olduğunda" (When Genious Failed)

Kalın Kuyruklar





Kalın Kuyruk Çarpıklığını Ölçmek

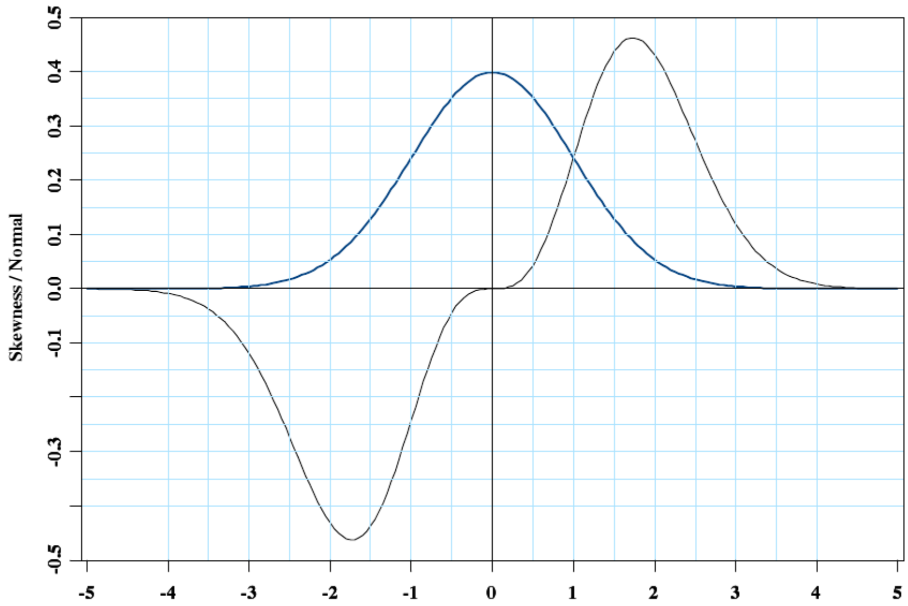
Çarpıklık

$$skew\left(x\right) = \frac{E\left(x - E\left(x\right)\right)^3}{std\left(x\right)^3} \tag{1}$$

Basıklık

$$kurto\left(x\right) = \frac{E\left(x - E\left(x\right)\right)^4}{std\left(x\right)^4} \tag{2}$$

Standart normal dağılımın çarpıklığı nedir?



Standart normal dağılımın basıklığı nedir?

Dikkat Edin: Bazı rassal değişkenler için çarpıklık ve basıklık bulunmayabilir.

Olay Riski ile İlgili Bir Model

Günlük Getiri r:

$r = X + y$

x normal bileşen:

y aniden yükselen bileşen:

$$y = \begin{cases} J & \text{p olasılıkla} \\ 0 & \text{1-p olasılıkla} \end{cases}$$

x ve y birbirinden bağımsız.

Çöküş Modelinin Momentleri

ortalama:

$$E\left(r\right) = \mu + J \cdot p \tag{3}$$

varyans:

$$var\left(r\right) = \sigma^2 + J^2 \cdot p \cdot \left(1 - p\right) \tag{4}$$

çarpıklık:

$$skew\left(r\right) = \frac{J^3 \cdot p \cdot \left(1 - p\right) \cdot \left(1 - 2p\right)}{\sqrt[3]{var\left(r^2\right)}} \tag{5}$$

Çöküş Modelinin Çarpıklığı

	P	J	Çarpıklık
Ayda Bir Kez	1/12	-2%	-1.0
Yılda Bir Kez	1/365	-10%	-5.6
Yaşam Süresi Boyunca Bir Kez	1/365/100	-50%	-7.1

Her zıplama modeli (jump model) yıllık beklenen getiri %12 ve yıllık oynaklık %15 olacak şekilde kalibre edilmiştir.

Bu üç modelin getirileri ortalama-varyans yatırımcı için eşit düzeyde çekicidir.

Çarpıklık Tercihi

Bir yatırımcının risk iştahını üç şekilde dikkate alan bir fayda fonksiyonu:

$$U(r) = E(r) - \frac{1}{2} \cdot A \cdot var(r) + \frac{1}{6} \cdot B \cdot E(r - E(r))^3 \tag{6}$$

1. beklenen getiri istenen birşeydir;

2. getirinin varyansı istenmeyen bir şeydir ($A > 0$);

3. pozitif çarpıklık istenen bir şeydir ama negatif çarpıklık istenmez ($B > 0$).

Eğer B=0 olarak alırsak, tekrar ortalama-varyans yatırımcıyı elde ederiz.

Başlangıçtaki Modelde Değişiklik

Başlangıçtaki probleme iki değişiklik:

1. Yatırımcı çarpıklık yönünde tercihe sahip;

$$U\left(r\right)=E\left(r\right)-\frac{1}{2}\cdot A\cdot var\left(r\right)+\frac{1}{6}\cdot B\cdot E\left(r-E\left(r\right)\right)^{3} \tag{7}$$

2. Riskli varlığın r_p çarpıklığı negatif.

$$\text{çarpıklık}=-2$$

Optimizasyon problemi:

$$\begin{matrix} max \\ y\in\mathbb{R} \end{matrix}\; U\left(r_y\right) \tag{8}$$

Daha önce olduğu gibi, r_p portföy getirisidir:

$$r_y=\left(1-y\right)\cdot r_f+y\cdot r_p \tag{9}$$

Problemi Biçimlendirmek

Daha önce olduğu gibi, servetinin y kısmını riskli varlığaa r_p, geri kalanını ise risksiz varlığa r_f yatıran bir yatırımcının faydasını $U(r_y)$ hesaplayacağız:

$$r_y = r_f + y \cdot (r_p - r_f) \tag{10}$$

$U(r_y)$'deki iki eski terim:

$$E\left(r_y\right) = 0.07 + 0.08 \cdot y; \quad var\left(r_y\right) = 0.22^2 \ \cdot y^2 \tag{11}$$

$U(r_y)$'deki yeni terim:

$$E\left(r_y - E\left(r_y\right)\right)^3 = y^3 \cdot E_p - E((r_p)^3 \tag{12}$$

Tanım gereği:

$$E\left(x - E\left(x\right)\right)^3 = skew\left(x\right) \cdot std\left(x\right)^3 \tag{13}$$

Sonuç olarak:

$$E\left(r_y - E\left(r_y\right)\right)^3 = 0.22^3 \cdot (-2) \cdot (y)^3 \tag{14}$$

Optimizasyon Aracı

$U(r_y)$'nin üç terimini kullanarak optimizasyon problemimizi matematiksel ifadelerle yazarız:

$$\begin{matrix} max \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \; U\left(r_y\right) \tag{15}$$

$$f\left(y\right) = 0.07 + 0.08 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot A \cdot 0.22^2 + \frac{1}{6} \cdot B \cdot 0.22^3 \cdot (-2) \cdot y^3 \tag{16}$$

Başlangıçtaki problemimizde, $f(y)$, y'nin ikinci dereceden doğrusal bir fonksiyonudur.

Peki şimdiki modelimizde nasıldır?

Optimizasyon: Analitik Metot

Matematiksel temel:

- y^*, $f^{'}(y) = 0$'ın çözümü olsun:
- $f^{''}(y^*) < 0$ olsun, o zaman y^* gerçek optimum çözümdür.

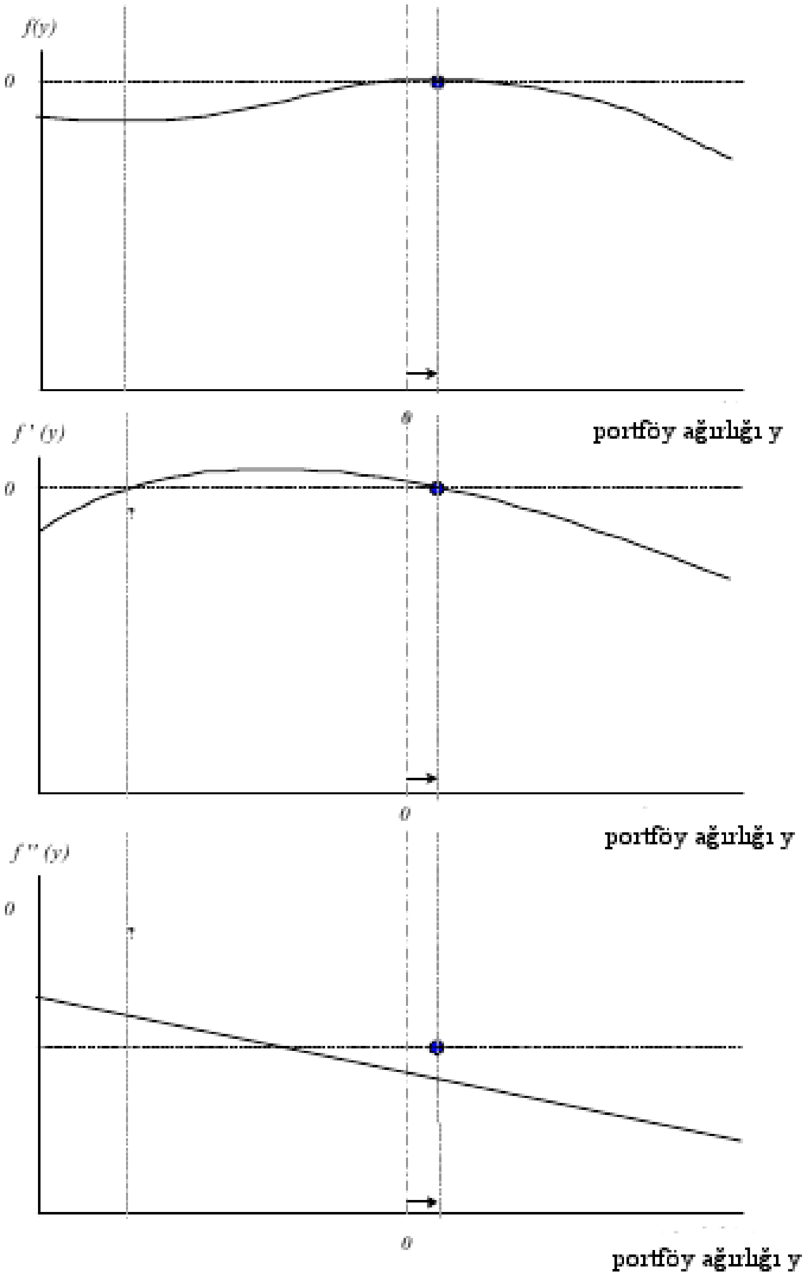
Türev alalım:

$$f'(y) = 0.08 - 0.22^2 \cdot A \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 0.22^3 \cdot (-2) \cdot B \cdot y^2 \tag{17}$$

$$f''(y) = -0.22^2 \cdot A + \frac{1}{2} \cdot 0.22^3 \cdot (-2) \cdot B \cdot y \tag{18}$$

Ne düşünüyorsunuz? Optimum y^*'ı nasıl bulabiliriz? Optimum y^* var mı?

Optimizasyon: Grafiksel Bir Çözüm



Varyanstan kaçınma katsayısı A=4, çarpıklık tercihi B=5 olsun.

Optimum portföy ağırlığı y^*=0.37'dir.

Aynı seçim kümesi verildiğinde (r_P, r_f), ortalama-varyans yatırımcının A=4 iken $y^* = 0.41$ kadar yatıracağını hatırlayınız.

Optimum Dağıtımın Belirleyicileri

Şimdiden şunları biliyoruz:

1. varyanstan daha çok kaçınan bir yatırımcı riskli varlığa daha az yatırım yapar:

$A \uparrow \Longrightarrow y^*$

2. risk primi yüksekse, riskten kaçınan yatırımcı riskli varlığa daha çok yatırım yapar:

$E(r_p) - r_f) \uparrow \Longrightarrow y^* \downarrow$

3. risk primi aynıysa, riskli varlığın oynaklığı arttığında, riskten kaçınan bir yatırımcı o varlıktan daha az tutar: $std(r_p) \uparrow \Longrightarrow y^*$

Yeni Sonuçlar

Negatif çarpıklıktan kaçınan bir yatırımcı çarpıklığı negatif olan riskli varlığa daha az yatırım yapma eğilimindedir: $B \uparrow \Longrightarrow y^*$

Risk primi ve oynaklık aynıysa, riskli varlığın negatif çarpıklığı arttığında, çarpıklık tercihi olan yatırımcı bu varlıktan daha az tutar: çarpıklık $(r_p) \downarrow \Rightarrow y^*$

Dönem Etkisi

Dönem etkisini incelemek için, hisse senedi getirilerinin zamanla nasıl biriktirildiğini anlamamız gerekir.

Basit modelle başlayalım.

$r_1 = \mu + \sigma\varepsilon_1$

$r_2 = \mu + \sigma\varepsilon_2$

$r_3 = \mu + \sigma\varepsilon_3$

$\ldots$

Günlük şoklar, t, birbirinden bağımsızdır ve standart normal dağılıma uyar.

Odak Noktası:

BKM Bölüm 6, Ek A ve B

- s. 172-177 (olasılık, olasılık dağılımı, çarpıklık, normal dağılım)
- s. 178-181 (fayda, fayda fonksiyonu)
- s. 163-166 arası
- s. 188
- s. 191-195 arası (fayda fonksiyonu, fayda eğrileri, CAL)

Okuyun: Black (1995)

Potansiyel Soru Çeşitleri: -

Bir Sonraki Ders İçin Sorular

Lütfen Okuyun:

- BKM Bölüm 8,
- Kritzman (1994), ve
- Kritzman (1991)

Aşağıdaki sorular üzerinde düşünün:

- Portföy çeşitlendirmesi ile neyi ifade ediyoruz?
- Portföy çeşitlendirmesi ne zaman işe yarar, ne zaman işe yaramaz?
- Günlük hayattan, çeşitlendirme ilkesinin kullanıldığı finansal olmayan bir örnek verebilir misiniz?