15.433 YATIRIM

Ders 3: Portföy Teorisi

Bölüm 1: Problemi Oluşturmak

Bahar 2003

Biraz Tarih

Mart 1952'de, Şikago Üniversitesi'nde yüksek lisans öğrencisi olan 25 yaşındaki Harry Markowitz, Journal of Finance dergisinde Portföy Seçimi adlı makalesini yayınladı.

Makale şu cümleleyle başlıyor: "Portföy seçim süreci iki aşamaya ayrılabilir: Birinci aşama gözlem ve deneyim ile başlar ve mevcut hisse senetlerinin gelecekteki performanslarına ilişkin düşüncelerle son bulur. İkinci aşama gelecekteki performanslara ilişkin düşüncelerle başlar ve portföy seçimi ile son bulur".

38 yıl sonra bu makalesi ona ekonomi dalında Nobel Ödülü kazandı.

Giriş

Yatırımların iki temel öğesi:

- yatırım fırsatı;
- yatırımcı.

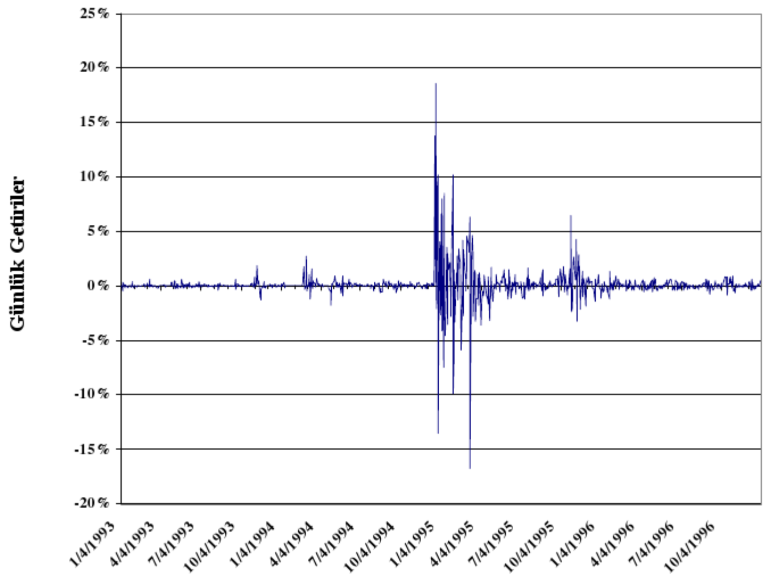
Bu dersteki amacımız:

- finansal varlıklar için bir model oluşturmak,
- yatırımcılar için bir model oluşturmak,
- optimum portföy seçimi.

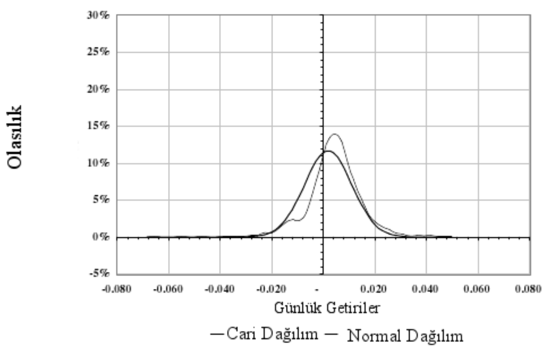
Finansal Getirileri Modellemek

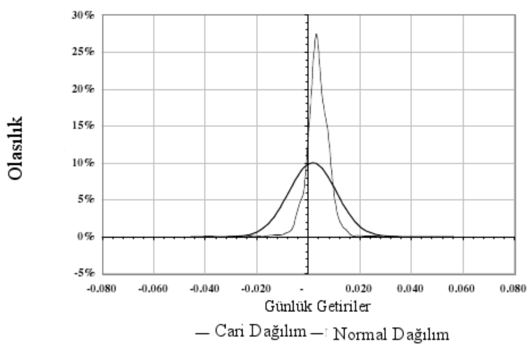
Aslında bütün varlıklar risklidir. Finansal varlıklar, reel varlıklardaki alacaklar bir risk taşırlar:

- Bazıları riski minimum hale getirmek için dizayn edilirler.
- Bazıları riski ele geçirmek (capture) için dizayn edilirler



Şekil 1: Meksika Pezosunun getirisi, Kaynak: Bloomberg Profesyonel





Şekil 2: S&P 500 Endeksinin Getirisi, Kaynak: Bloomberg Profesyonel

Şekil 3: 10 Yıllık Hazine Tahvilinin Getirisi, Kaynak: Bloomberg Profesyonel

Yatırımcıları Modelleme

Yatırımcılar genelde riskten kaçarlar, her ne kadar bazıları diğerlerinden daha çok riskten kaçsa da. *"Daha sonra yatırımcının beklenen getiriyi istenen, varyansı istenmeyen bir şey olarak tanımladığı bir kural ele alalım"*.- Markowitz (1952)

Yatırımcıların farklılığı:

- Bireysel yatırımcılar ve şirketler
- Farklı vergi oranlarına tabi yatırımcılar
- Bilgi sahibi olan ve bilgi sahibi olmayan yatırımcılar
- Genç ve yaşlı yatırımcılar
- Davranış sorunları: zarardan kaçınmak, zihinsel muhasebe (mental accounting), aşırı kendine güven, aşırı tepki, yetersiz tepki vb.

A veya B'yi seç

$$A : \begin{cases} \$240'000 & 100\% \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

$$B : \begin{cases} \$1'000'000 & 25\% \text{ olasılıkla} \\ \$0 & 75\% \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

C veya D'yi seç

$$C : \begin{cases} \$-750.000 & 100\% \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

$$D : \begin{cases} \$0 & 25\% \text{ olasılıkla} \\ \$-1.000.000 & 75\% \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

Denk Seçimler:

$$A + D : \begin{cases} \$240.000 & 25\% \text{ olasılıkla} \\ \$-760.000 & 75\% \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

$$B + C : \begin{cases} \$250.000 & 25\% \text{ olasılıkla} \\ \$-750.000 & 75\% \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

Problemi Oluşturmak

Neye ihtiyacımız var ... bir tarif ve malzemeler.

Yatırım fırsatı:

- risksiz oran $r_f = 7\%$
- riskli varlığın faizi $r_p : E(r_p) = 15\%, \quad std(r_p) = 22\%.$

BKM, 157 ff. p.

Bir ortalama-varyans yatırımcı (mean-variance investor):[1]

$$U(r) = E(r) - 0.005 \cdot A \cdot var\,(r) \tag{1}$$

Optimum portföy seçimi:

- toplam servetin y kadarını riskli varlığa yatır, geri kalanını risksiz varlığa yatırın.
- Olanaklı portföyler: $r_y = (1 - y) \cdot r_f + y \cdot r_p$
- optimum portföy?

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \; U(r_y)$$

burada R gerçek sayılar uzayını gösterir.

[1]0.005 katsayısı literatürde vardır, aynı zamanda $\frac{1}{2}$ olarak da yazılır. Öznel riskten kaçınma katsayısı A'yı kalibre etmek için kullanılan kalibrasyon katsayısıdır.

Portföy Oluşturmak

Fırsat kümesi sabit: r_f and r_p

Tek seçim değişkenimiz: y [risk portföyüne ne kadar yatırım yapılacağı]

Nihai Çıktı:

$$r_y = (1-y)\cdot r_f + y \cdot r_p \tag{2}$$

$$E(r_y) = E((1-y)\cdot r_f) + E(y \cdot r_p) \tag{3}$$

$$= (1-y)\cdot 0.07 + y \cdot 0.15 \tag{4}$$

$$= 0.07 + 0.08 \cdot y \tag{5}$$

$$\begin{aligned} var(r_y) &= var((1-y)\cdot r_f) + var(y \cdot r_p) \\ &\quad +2 \cdot cov((1-y)\cdot r_f, y \cdot r_p) \end{aligned} \tag{6}$$

$$= 0 + y^2 \cdot 0.22^2 + 0 \tag{7}$$

$$= 0.22^2 \cdot y^2 \tag{8}$$

$$std(r_y) = \sqrt{var(r_y)} = 0.22|y| \tag{9}$$

Risk Getiri Kombinasyonları

Herbir y seçimi getiri E ve risk standart sapması kombinasyonu verir.

- y $\geq$0 için,

$$y = \frac{E\left(r_y\right) - 0.07}{0.08} = \frac{std\left(r_y\right)}{0.22} \tag{10}$$

- Daha genel olarak, her bir y için $y < 0$ olur.

$$y = \frac{E\left(r_y\right) - r_f}{E\left(r_p\right) - r_f} = \frac{std\left(r_y\right)}{std\left(r_p\right)} \tag{11}$$

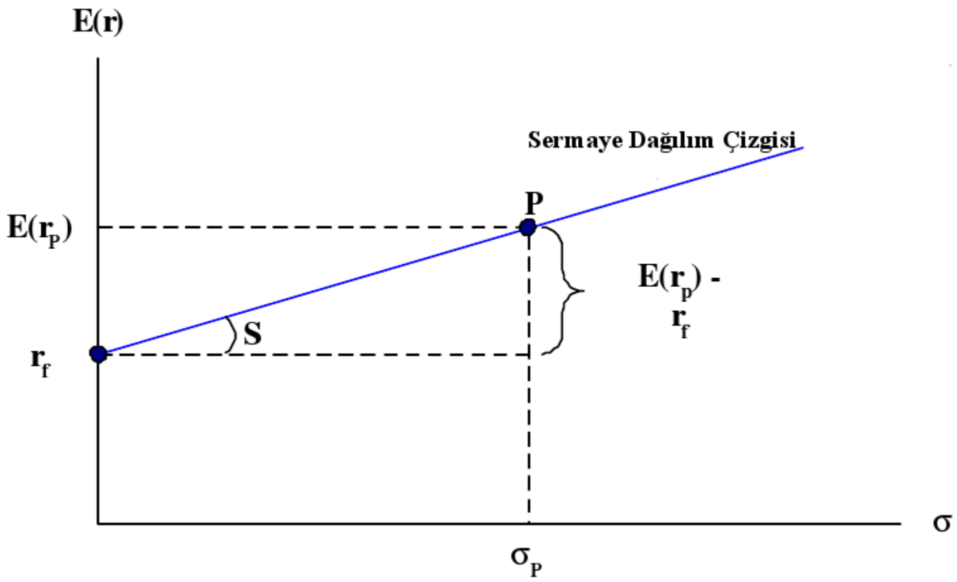
y bütün pozitif reel doğru boyunca değişebilir, fakat bu ilişki getiri ve standart sapma arasındaki ilişkiye bağlı olmaksızın geçerlidir.

E ve std. arasındaki doğrusal ilişki:

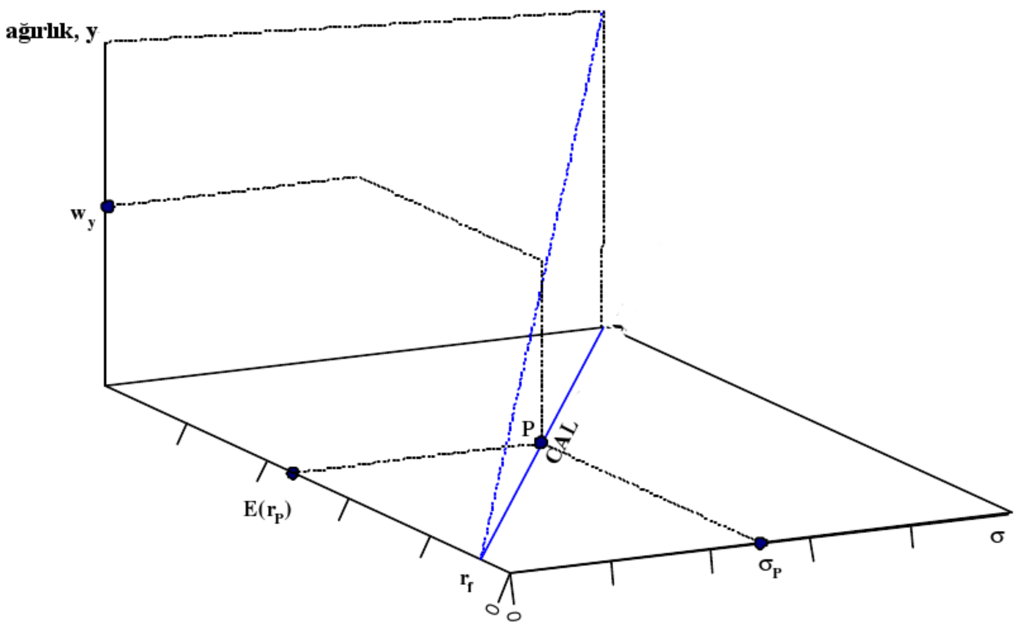
$$E\left(r_y\right) - r_f = \frac{E\left(r_y\right) - r_f}{std\left(r_p\right)} std\left(r_y\right) \tag{12}$$

Sermaye Dağılım Doğrusu

Bütün y $\in R$ bir araya getirerek, yatırımcı için mevcut olan bütün (μ, σ) risk-getiri bileşimlerini elde ederiz.



Şekil 4: Sermaye Dağılım Doğrusu



Şekil 5: Sermaye Dağılım Doğrusu, farklı bir perspektif.

Sharpe Oranı

Bir portföyün, r, çekiciliğinin bir ölçütü Sharpe Oranı'dır (S):

Sezgisel olarak, S ekstra risk başına ekstra getiriyi ölçer.

$$S = \frac{E\left(r\right) - r_f}{std\left(r\right)} \tag{13}$$

CAL'ın şu şekilde yazılabildiğini hatırlayın:

$$E\left(r_y\right) - r_f = \frac{E\left(r_y\right) - r_f}{std\left(r_p\right)} std\left(r_y\right) \tag{14}$$

Seçilen ekstra risk std(r_y) için, ekstra getiri: $S_p.std(r_y)$' dir.

Ayrıca, herhangi bir portföyün r_f ve r_p'den elde edilen Sharpe Oranı S_y aynıdır. y $\geq$0 için:

$$S_y = S_p = \frac{E\left(r_y\right) - r_f}{std\left(r_p\right)} \tag{15}$$

Bu size mantıklı geliyor mu?

Optimizasyon Problemini Oluşturmak

Şimdi portföyümüzü optimizasyon makinesine yüklemeye hazırız:

$$\begin{matrix} max \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \; U\left(r_y\right) \tag{16}$$

burada

$$U(r) = E(r) - 0.005 \cdot A \cdot var\left(r\right) \tag{17}$$

Daha önceki işlemlerimizden şunu biliyoruz:

$$E(r_y) = 0.07 + 0.08 \cdot y; \quad var(r_y) = 0.22^2 \cdot y^2 \tag{18}$$

Sonuç olarak optimizasyon problemimiz max f(y) olur:

$$\begin{matrix} max \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \; U\left(r_y\right) \tag{19}$$

$$f(y) = 0.07 + 0.08 \cdot y - 0.0005 \cdot A \cdot y^2$$

Optimizasyon Aracı

Bir optimizasyon probleminin üç bileşeni vardır:

- Amaç fonksiyonu f(y);
- Değişken, y; ve
- arama uzayı R

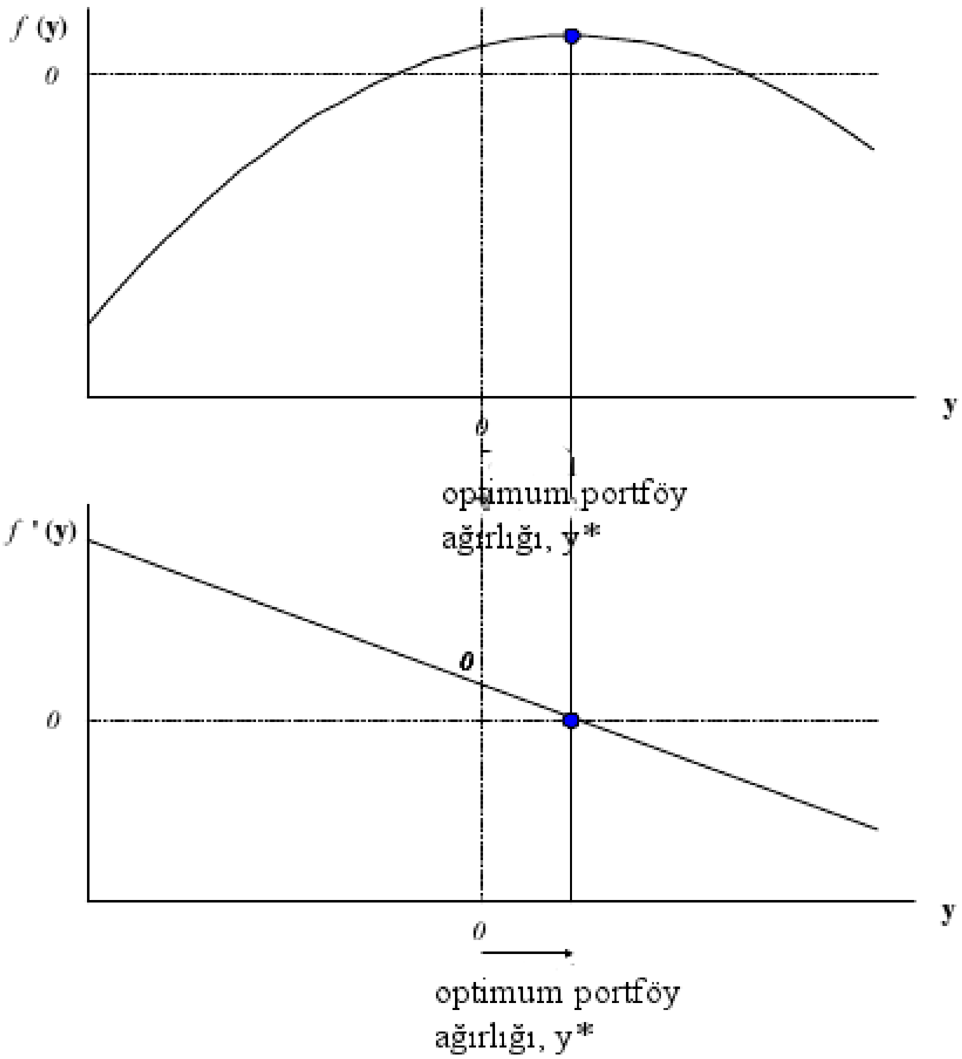
Bir optimizasyon problemini çözmenin üç yolu vardır:

- analitik olarak;
- numerik olarak; ve
- grafiksel olarak.

Matematiksel temel:

- y^*, $f^{'}(y) = 0$'ın çözümü olsun;
- eğer $f^{''}(y^*) < 0$ ise, y^* tam olarak optimum çözümdür.

Grafiksel Çözüm



Şekil 6: Optimum Portföy Ağırlığı

Analitik Bir Çözüm

Riskten kaçınma katsayısı A=4, ve optimum portföy ağırlığı $y^* = 0.41$ olarak alınmıştır.

$$f'(y) = \frac{\partial f(y)}{\partial y} = 0.08 - 0.22^2 \cdot A \cdot y \tag{20}$$

$$f''(y) = \frac{\partial f'(y)}{\partial y} = -0.22^2 \cdot A \tag{21}$$

1. $f^{'}(y^*) = 0$' ı sağlayan y^*' ı bulun.

2. y^*'ın optimum nokta olup olmadığını kontrol edin: $f^{''}(y^*) < 0$?

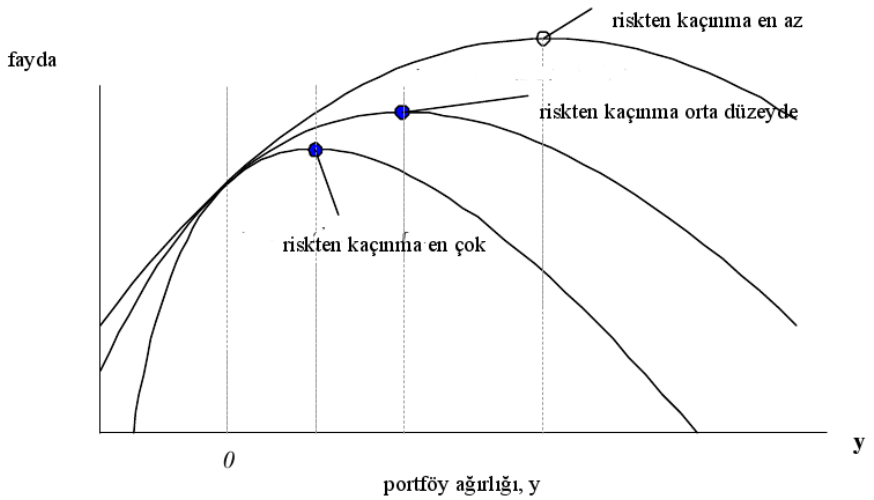
$$y* = \frac{0.08}{0.22^2 \cdot A} \tag{22}$$

Portföy Ağırlıklarının Belirleyicileri

Daha genel olarak optimum çözüm şu şekilde ifade edilebilir:

$$y* = \frac{E\left(r_p - r_f\right)}{var\left(r_p\right) \cdot A} \tag{23}$$

Riskten daha çok kaçına yatırımcı (daha büyük riskten kaçınma katsayısına, A, sahip olan), riskli varlığa daha az yatırım yapar.



Şekil 7: Fayda Fonksiyonu

İlk baştaki riskli varlığın risk primi, $E(r_p) - r_f$ düşerse, riskten kaçınan yatırımcı riskli varlıktaki yatırımını ona göre azaltacaktır.

Başlangıçta varlık riskliyse ($var(r_p) > 0$ ile), fakat risk primi sıfırsa, riskten kaçınan hiçbir yatırımcı riskli varlığı tutmaz. Eğer risk primi negatifse, riskten kaçınan yatırımcı varlığı satmaya başlayacaktır.

Bu fayda fonksiyonuna sahip bir yatırımcı için optimum portföy ağırlığı y^* nedir?

İpucu: Bu yatırımcı sadece Sharpe Oranıyla ilgileniyor.

Bir Sonraki Aşamaya Geçiş

Sistemimiz aşağıdakileri varsayar:

1. Bir ortalama varyans yatırımcı (mean variance investor);

2. Yatırım dönemi bir yıl olarak sabit;

3. Varlıklar arasında dinamik yeniden dengeleme mümkün değil.

Tabii ki bu sistem gerçek yatırım probleminin kaba bir tanımlamasıdır.

Yine de, bu örnek önemlidir:

- Birincisi, bize portföy optimizasyon problemi hakkında düşünmemiz için bir çerçeve sağlar.
- İkincisi, her ne kadar basit de olsa bize zengin bir sezgi sağlar.

Şimdi bir sonraki aşamaya geçebiliriz.

Modele Üç Uzantı

1. Çarpıklık Uzantısı: Çarpık varlık getirilerine izin verir, pozitif çarpıklığı tercih eden, negatif çarpıklıktan kaçınan tercihleri ilave eder.

2. Dönem Uzantısı: Yatırım döneminin değişmesine izin verir.

3. Dinamik Uzantı: Varlıklar arasında dinamik yeniden dengelemeye izin verir.

Okumalar

Peter Bernstein'nın Capital Ideas kitabının 2. B ölümündeki "Fourteen Pages to Fame" bölümü.

Odak Noktası:

Bölüm 6 ve 7:

- s. 157 (denklem 6.1)
- s. 161
- s. 163-166 arası
- s. 188
- s. 191-195 arası (fayda fonksiyonu, fayda eğrileri, CAL)

Oku: Kritzman (1992)

Potansiyel Soru Çeşitleri: Bölüm 6 kavram bilgisi soruları 3 ve 4, s. 168 ff. soruları 2, 9, 10. Bölüm 7, kavram bilgisi soruları 2, 3, 4, 5, s. 200 ff. soruları 4, 8, 13.

Bir Sonraki Ders İçin Sorular

Lütfen BKM Bölüm 6 Ek A ve B kısımlarını, Black (1995) ve Kritzman (1992)'yi okuyun.

Piyasa çöküşleri nasıldır? Olasılığı düşük fakat etkileri büyük olabilecek risk durumları yatırım kararlarında ihmal edilebilir mi?

BKM'nin ortalama-varyans analizini savunması hakkında ne düşünüyorsunuz?Paul Samuelson'nun ispatındaki temel varsayım nedir? Bu varsayım gerçekçi midir?