

# Karma Stratejiler Bilgi Notu

## Ben Polak, Econ 159a/MGT522a

### Ekim 4, 2007

Son seminerin ana dersi şöyleydi:

**Ana ders.** *Eğer bir karma strateji en iyi tepkiyse o zaman karmada yer alan saf stratejilerin her birisi de en iyi tepkidir. Özellikle, her biri aynı beklenen getiriyi vermelidir.*

Bunun neden doğru olduğunu açıklamadan önce, bu dersi yeni notasyonumuzu kullanarak formal şekilde yazmayı deneyelim.

**Aynı Dersin daha Formal İfadesi.** Eğer oyuncu  $i$ 'nin karma stratejisi  $p_i$  diğer oyuncuların (karma) stratejileri  $p_{-i}$ 'ye en iyi tepkiyse, o zaman,  $p_i(s_i) > 0$ 'ın doğru olduğu her bir  $s_i$  için,  $s_i$ 'nin kendisi de  $p_{-i}$ 'ye en iyi tepki olmalıdır. Özellikle,  $Eu_i(s_i, p_{-i})$  bu tür stratejilerin hepsi için aynı olmalıdır.

**Neden bu doğrudur?** Farz edin ki doğru değil. O zaman benim en iyi tepki karmamda pozitif olasılık ayrılmış ve  $p_{-i}$ 'ye karşı daha düşük beklenen getiri veren en az bir tane saf strateji  $s_i$  vardır. Eğer birden fazla varsa, en düşük beklenen getirisi olana odaklanın. Diyelim ki ben o (düşük getirili) saf stratejiyi karmamdan çıkardım ve ona ayırmış olduğum ağırlığı karmamdaki bir başka (yüksek getirili) stratejiye verdim. Bu benim beklenen getirimi artırmış olmalıdır (aynı [beysbolda] düşük vuruş yüzdesi olan oyuncuyu çıkarınca takımın ortalama vuruş yüzdesinin artması gibi). Ama o zaman orijinal karma strateji en iyi tepki olmuş olamaz: yeni karma strateji kadar iyi kazandırmıyor. Bu bir çelişkidir. ■

**Bundan bize ne?** Bu dersin hemen ortaya çıkan bir çıkarımı şudur, eğer bir karma strateji bir Nash Dengesinin bir kısmını oluşturuyorsa, o zaman karmadaki her saf stratejinin kendisi en iyi tepki olmak zorundadır. Bu yüzden karmada yer alan tüm stratejiler aynı beklenen getiriyi vermelidir. Biz karma strateji ND'ni bulmak için bu dersi kullanacağız.

#### Örnek 1 Cinsiyetler Savaşı

	a	b
A	2, 1	0, 0
B	0, 0	1, 2

Bu oyunda, (A, a) ve (B, b)'de iki tane saf strateji ND olduğunu biliyoruz. Başka bir karma strateji ND var mı bir bakalım. Farz edelim ki satırın A ve B üzerinden karma

yaptığı başka bir denge var. Günün dersi uyarınca, bu durumda biliyoruz ki hem A hem B kolon oyuncusu ne yaparsa yapsın en iyi tepkidir. Ama bunların en iyi tepki olabilmeleri için, her ikisi de satır oyuncusu için aynı beklenen getiriyi veriyor olması gerekir. Biz *satırın* beklenen getirileri hakkındaki gerçeği kullanarak *kolonun* ne yaptığını bulacağız!

Diyelim ki kolonun karma stratejisi  $a$ 'ya  $q$  olasılık ağırlığı ve  $b$ 'ye  $(1 - q)$  olasılık ağırlığını veriyor. O zaman,

$$\text{satırın } (q, 1 - q)\text{'ya karşı A'dan beklenen getirisi} = q [2] + (1 - q) [0] = 2q$$

$$\text{satırın } (q, 1 - q)\text{'ya karşı B'den beklenen getirisi} = q [0] + (1 - q) [1] = 1 - q$$

Ama eğer bu beklenen getiriler eşit olmalıysa, o zaman şunu buluruz  $2q = 1 - q$  veya  $q = 1/3$ .

Buraya kadar özetlersek, eğer bir ND'nde satır her iki stratejisi üzerinden karma yapıyorsa o zaman ikisi de aynı beklenen getiriyi veriyor olmalıdır, bu durumda kolon  $(1/3, 2/3)$  ağırlıklarıyla karma yapıyor olmalıdır.

**Buradaki hileyi fark edin. *Satır*'ın karmasındaki stratejiler arasında kayıtsız kalması gerektiği gerçeğini kullanarak *Kolon*'un dengedeki karma stratejisini bulduk.**

Şimdi satırın denge karmasını bulmak için hileyi ters çevirelim. Eğer kolonun  $a$  ve  $b$  üzerinden karma yaptığı bir denge varsa, o zaman (günün dersi uyarınca) biliriz ki satır ne yaparsa yapsın  $a$  ve  $b$  en iyi tepki olmalıdır. Ama ikisinin de en iyi tepki olabilmesi için, ikisi de kolona aynı beklenen getiriyi veriyor olmalıdır. O zaman,

$$\text{Kolonun } (p, 1 - p)\text{'ye karşı a'dan beklenen getirisi} = p [1] + (1 - p) [0] = p$$

$$\text{Kolonun } (p, 1 - p)\text{'ye karşı b'den beklenen getirisi} = p [0] + (1 - p) [2] = 2(1 - p)$$

Ama eğer bu beklenen getiriler eşit olmalıysa, o zaman şunu buluruz  $2(1 - p) = p$  veya  $p = 2/3$ .

Özetlemek gerekirse, eğer bir ND'nde kolon her iki stratejisi üzerinden karma yapıyorsa o zaman ikisi de aynı beklenen getiriyi veriyor olmalıdır, bu durumda satır  $(2/3, 1/3)$  ağırlıklarıyla karma yapıyor olmalıdır. ***Kolon*'un karmasındaki stratejiler arasında kayıtsız kalması gerektiği gerçeğini kullanarak *Satır*'ın dengedeki karma stratejisini bulduk.**

Ben bu  $[(2/3, 1/3), (1/3, 2/3)]$  karma strateji profilinin ND olduğunu öne sürüyorum. Bunu göstermek için her iki oyuncunun da tam olarak daha kârlı bir sapmasının olmadığını göstermem gerekir ama bunu yapmak oldukça kolaydır. Dengeyi öyle oluşturduk ki, kolonun karması  $(1/3, 2/3)$  veriyken, satırın her bir stratejisi A ve B aynı beklenen getiriyi veriyordu. Ama bu durumda, bu saf stratejilerin herhangi bir karması (denge karması dâhil) aynı beklenen getiriyi verecektir. Yani olası tüm sapmalar aynı

beklenen getiriyi verir: hiçbirisi tam olarak daha kârlı değildir. Aynı argüman kolon için de geçerlidir.

### Örnek 2. Taş [R], Makas [S], Kâğıt [P].

	r	s	p
R	0, 0	1, -1	-1, 1
S	-1, 1	0, 0	1, -1
P	1, -1	-1, 1	0, 0

Bu oyunda karma strateji ND'nin  $[(1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)]$  olduğunu biliyoruz, ama son örnekteki metodu kullanarak sanki bilmiyormuşuz gibi bu dengeyi bulalım. Bir kez daha, varsayalım ki satır R, S ve P'nin hepsi üzerinden karma yapıyor. Günün dersi uyarınca, biliyoruz ki bu durumda R, S ve P'nin her biri kolon ne yaparsa yapsın en iyi tepki olmalıdır. Ama bunların her birisinin en iyi tepki olabilmesi için satır oyuncusuna aynı beklenen getiriyi sağlıyor olmaları gerekir. Kolonun ne oynayacağını bulmak için satırın beklenen getirileri hakkındaki bu gerçeği kullanacağız. O zaman,

Satırın  $(q_r, q_s, 1 - q_r - q_s)$ 'ye karşı R'den beklenen getirisi =  $q_r[0] + q_s[1] + (1 - q_r - q_s)[-1]$

Satırın  $(q_r, q_s, 1 - q_r - q_s)$ 'ye karşı S'den beklenen getirisi =  $q_r[-1] + q_s[0] + (1 - q_r - q_s)[1]$

Satırın  $(q_r, q_s, 1 - q_r - q_s)$ 'ye karşı P'den beklenen getirisi =  $q_r[1] + q_s[-1] + (1 - q_r - q_s)[0]$

Bu üç beklenen getiriyi birbirine eşitleyerek (ve birazcık temel cebir kullanarak) şu çözümü buluruz  $q_r = q_s = (1 - q_r - q_s) = 1/3$ .

Özetlemek gerekirse, eğer bir ND'de satır tüm stratejilerinin üzerinden karma yapıyorsa o zaman her biri aynı beklenen getiriyi vermesi gerekir, bu durumda kolon  $(1/3, 1/3, 1/3)$  ağırlıklarıyla karma yapıyor olmalıdır. Bir kez daha dengede kolonun denge karma stratejisini çözmek için satırın karmasında yer alan stratejilere kayıtsız olması gerektiği gerçeğini kullanırız.

Satırın denge karmasını bulmak için aynısını yapabiliriz. Yani, dengede satırın denge karma stratejisini çözmek için kolonun karmasında yer alan stratejilere kayıtsız olması gerektiği gerçeğini kullanırız. Ancak, argüman simetrik olduğundan, bunu atlayalım. Bir önceki örnekteki gibi, hiçbir oyuncunun kârlı bir sapması olmadığını kontrol etmek kolaydır. Dengeyi öyle oluşturduk ki, kolonun karması veriyken, satırın her bir saf stratejisi aynı beklenen getiriyi veriyordu. Ama bu durumda, bu saf stratejilerin herhangi bir karması (denge karması dâhil) aynı beklenen getiriyi verecektir. Yani olası tüm potansiyel sapmalar aynı beklenen getiriyi verir: hiçbirisi

tam olarak daha kârlı değildir. Aynı argüman kolon için de geçerlidir. Yani bunun bir denge olduğunu göstermiş olduk.

Sadece enteller için. Bu örnekte, başka karma strateji dengelerinin olmadığını göstermek biraz daha uğraşmayı gerektirir. Her iki oyuncunun da tüm stratejileri üzerinden karma yaptığı tek dengede, her oyuncunun  $(1/3, 1/3, 1/3)$  ile karma yaptığını göstermiştik. Ama prensipte, bir oyuncunun sadece iki stratejisiyle karma yaptığı başka karma strateji dengelerinin olması mümkündür. Neden böyle bir dengenin olamayacağını söyleyen argümanın taslağını oluşturayım. Farz edelim ki böyle bir denge var. Genelleştirmeyi kaybetmeden, kolon iki stratejisinden karma yapan oyuncu olsun ve genelleştirmeyi kaybetmeden, kolonun sadece  $r$  ve  $s$  ile karma yaptığını varsayalım; yani, kolonun karma stratejisi  $p$ 'ye 0 olasılık ayırır. Bu veriyken, satırın  $R$ 'den beklenen getirisi  $S$ 'den beklediğinden tam olarak fazladır. Bu nedenle satırın en iyi tepkisi  $S$ 'ye sıfır olasılık ayırıyor olmalıdır. Ama bu veriyken, kolonun  $p$ 'den beklenen getirisi  $r$ 'den beklediğinden tam olarak daha fazladır. Bu nedenle kolonun en iyi tepkisi  $r$ 'ye 0 olasılık ayırıyor olmalıdır. Ama eğer (varsayıma göre) kolon  $p$ 'ye sıfır olasılık ayırıyorsa ve  $r$ 'ye sıfır olasılık ayırıyorsa, o zaman saf strateji  $s$ 'yi oynuyor olması gerekir. Ama çoktan biliyoruz ki hiçbirisi taş, makas, kâğıttaki herhangi bir dengede saf strateji oynuyor olamaz. ■

**Burada ne öğrendik?** Karma strateji Nash dengelerini bulmak için genel bir metot bulduk.

**Karma strateji ND bulmak için metot.** Farz edelim ki satır oyuncusunun birden fazla stratejisiyle karma yaptığı bir denge var. Eğer böyle bir denge varsa, kolonun dengedeki stratejisi sabitken bu stratejilerin her birisi aynı beklenen getiriyi veriyor olmalıdır. Eğer bu getirileri yazarsak [aynı yukarıdaki örneklerde yaptığımız gibi] kolonun denge karmasını çözümleyebiliriz. Bir başka deyişle, satırın kendi stratejileri arasında kayıtsız kalması kolonun denge karmasına işaret eder. Şimdi tam tersi. Kolonun karma yaptığı stratejilere bakın, kolonun kayıtsızlık koşullarını yazın ve satırın denge karmasını çözümleyin.

Neredeyse bitirdik ama hala birkaç (kolay) şeyi kontrol etmemiz gerekiyor. Birincisi, şimdi satır için bulduğumuz denge karması varsayımımıza başladığımız stratejileri gerçekten içermelidir! İkincisi, oluşturduğumuz her bir karma olasılığı gerçekten olasılık olmalıdır: 0 ile 1 arasında olmalıdırlar! Üçüncüsü, her zamanki gibi, hiçbir oyuncunun tam olarak daha kârlı bir sapması olmadığını kontrol etmeliyiz. Ama [yukarıdaki örneklerde gördüğümüz gibi] eğer karmada tüm stratejiler yer alıyorsa bu kontrol zaten bedavadan yapılmış olur!