“Düello” Tartışması

Ben Polak, Econ 159a/MGT 522a

Kasım 1, 2007

Aşağıdaki tartışma derste gördüğümüzden biraz daha formaldir (ve biraz daha az doğrudandır), ama mesajın özü aynıdır. Bazılarınız bunu faydalı bulabilir.

Kurallar. İki oyuncu vardır, her birinde ıslak bir sünger vardır. Odanın iki ucundan başlarlar. Oyuncuların dönüşümlü sıraları vardır. Her sırada oyuncu ya atış yapar veya ileri doğru bir adım atar. Eğer atış yapar ve vurursa kazanır. Eğer ıskalarsa, oyun devam eder yani efektif olarak kaybeder (çünkü diğer oyuncu yaklaşıncaya kadar bekleyip tam karşısından atış yapabilir.)

Stratejik karar. Ne zaman atış yapmalı?

Analizi kolay hale getirmek için ekstra yapı. Varsayalım ki oyuncuların becerileri biliniyor. Özellikle,

- $P_1(d)$ oyuncu 1’in d mesafedeyken atış yaptığında vurma olasılığı olsun ve
- $P_2(d)$ oyuncu 2’nin d mesafedeyken atış yaptığında vurma olasılığı olsun

Ek olarak, iki makul varsayım daha yapalım.

- $P_1(0) = P_2(0) = 1$ yani tam karşıdayken kesinlikle vurmayı başarıyorlar
- Hem P_1 hem de P_2 yani vurma olasılıkları mesafe ile düşüyor.

Fark ettiyseniz oyuncuların aynı beceride atıcı olduklarını varsaymak zorunda değiliz veya hatta birinin diğerinden tüm mesafelerde daha iyi atıcı olduğunu da, sadece becerilerinin bilindiğini varsaymalıyız.

Spekülasyonlar. Daha iyi olan atıcının ilk atışı yapacağını çünkü vuruş yapmasının daha muhtemel olduğunu düşünebiliriz. Alternatif olarak, kötü atıcının daha iyi atanı engellemeye çalıştığını da düşünebiliriz. Aslında, bu oyunu çözmenin doğru yolu: geriye dönük çıkarımdır.

İlk olarak, bize yardımcı olacak bazı ön gözlemler oluşturalım.

Gözlem A. Eğer oyuncu i bugün (d’de) j’nin yarın (d-1’de) atış yapmayacağını biliyorsa, o zaman oyuncu i bugün atış yapmamalıdır: yarından sonrayı (d-2’yi) bekleyip atış yapması daha iyidir.

Gözlem B. Eğer oyuncu i bugün (d’de) j’nin yarın (d-1’de) atış yapacağını biliyorsa, o zaman oyuncu i bugün atış yapmalıdır eğer ve sadece eğer i’nin bugün vuruş yaparak kazanma olasılığı $P_i(d)$ i’nin yarın j’nin ıskalamasıyla kazanma olasılığı olan (

1 – P_j(d-1)) den büyükse. Yani, eğer P_i(d) > (1 – P_j(d-1)) ise atış yap veya aynı şekilde eğer şu doğruysa atış yap

$$P_i(d) + P_j(d-1) > 1$$

ÇÖZÜM. Bu oyunun çözümünün – bu oyunu oynama yolunun – yukarıdaki eşitsizliğin tuttuğu ilk anda atış yapmak olduğunu ileri sürüyorum. Bunu görmek için, favori metodumuzla devam ederiz.

Geriye Dönük Çıkarım. Son olası karar nodundan başla, yani –belki de budalaca – burun buruna durdukları yerden başla.

d = 0. (Diyelim ki sıra oyuncu 2'de.) Oyuncu 2 atış yapar çünkü P_2(0) = 1.

d = 1. (Oyuncu 1'in sırasıdır) Aynı d = 0 argümanıyla, oyuncu 1 oyuncu 2'nin yarın atış yapacağını bilir. Bu yüzden, yukarıdaki Gözlem B uyarınca, oyuncu 1 eğer ve ancak eğer P_1(1) > (1 – P_2(0)) ise atış yapar, ki bu doğrudur çünkü P_2(0) = 1 Yani oyuncu 1 d = 1'de atış yapacaktır.

d = 2. (Oyuncu 2'nin sırasıdır) Aynı d = 1 argümanıyla, oyuncu 2 oyuncu 1'in yarın atış yapacağını bilir. Bu yüzden, yukarıdaki Gözlem B uyarınca, oyuncu 2 eğer ve ancak eğer şu doğruysa atış yapar:

$$P_2(2) + P_1(1) \overset{?}{>} 1. \qquad (*)$$

Bu eşitsizlik doğru veya yanlış olabilir. Eğer yanlışsa, o zaman işimiz bitmiştir: d = 2'de, oyuncu 2 atış yapmaz. Mesafe d = 3'te oyuncu 1 oyuncu 2'nin yarın (d=2'de) atış yapmayacağını bilir. Yani yukarıdaki Gözlem A uyarınca, bugün (d=3'te) oyuncu 2 atış yapmaz. Benzer şekilde, d = 4'te oyuncu 2 oyuncu 1'in d = 3'te atış yapmayacağını bilir. Yani oyuncu 2 d = 4'te atış yapmaz … Bu nedenle, bu durumda, ilk atış d = 1'de gerçekleşir.

O zaman diyelim ki (*) eşitsizliği doğru. Bu durumda, oyuncu 2 d = 2'de atış yapar, bu yüzden hadi d = 3'e bakalım.

d = 3. (Oyuncu 1'in sırasıdır) (*) eşitsizliğinin doğru olduğunu varsaydığımızdan, d = 2 argümanıyla, oyuncu 1 yarın oyuncu 2'nin atış yapacağını bilir. Bu durumda, yukarıdaki Gözlem B uyarınca, oyuncu 1 eğer ve ancak eğer P_1(3) > 1 – P_2(2) ise atış yapmalıdır veya buna denk olarak:

$$P_1(3) + P_2(2) \overset{?}{>} 1. \qquad (**)$$

Bu eşitsizlik doğru veya yanlış olabilir. Eğer yanlışsa, önceki gibi Gözlem A'yı kullanarak, işimiz bitmiştir: Bu durumda, ilk atış d = 2'de gerçekleşir.

Eğer değilse, argümanı geriye doğru devam ettirebiliriz, düellocularımızı birbirinden daha da daha da uzaklaştırarak ve (*) ve (**) gibi eşitsizlikler yaratarak.

Fark ettiyseniz bu “yıldız” eşitsizliklerinin sol tarafları mesafe arttıkça daha da daha da küçülür. Yukarıda olduğu gibi, bir (*) eşitsizliği tutmadığı anda işimiz bitmiştir. Bu yüzden, d* “yıldız” eşitsizliğinin tutuğu en yüksek mesafe olsun. Yani

$$P_i(d^*) + P_j(d^* - 1) > 1 \text{ ama}$$

$$P_j(d^* + 1) + P_i(d^*) < 1$$

Burada i d*’da sırası gelen oyuncudur. Daha önceki argümanımız uyarınca, ilk atışın d*’da gerçeleştiğini biliriz. ■

Oyunu geriye doğru analiz etmeyi bitirdiğimize göre, hadi işleri ileri doğru söyleyelim. Oyuncular “yıldız” eşitsizlik tutana kadar ileri doğru adım atarlar. Bu mesafe d* dır.Bu nokta da kğmin sırası geldiyse o atış yapar. Fark ettiyseniz daha iyi veya daha kötü atıcı olmanız fark etmez – önemli olan iki vuruş olasılığının toplamıdır.

Eğer d*’ın $P_i(d) + P_j(d) = 1$ noktasına çok yakın olduğunu fark edersek yanıtımız daha düzgün olur. O zaman kuralımız şudur “vuruş olasılıklarının toplamıın bir olduğu noktayıo geçer geçmez atış yapın”!

Bir şey sizi hala endişelendiriyor olabilir, d’daki eğer bugün atış yapmazsa yarın diğerinin atış yapacağını nasıl bilebilir? Yanıt şudur, “yıldız” eşitsizliği d*’da tuttuğundan ve eşitsizliğin solundaki olasılıklar mesafe ile azaldıklarından, (birbirini takip eden) daha yakın mesafelerde de “yıldız” eşitsizlik geçerli olmaya devam edecektir. Yani d = 1, d = 2 ve d = 3’te kullanmış olduğumuz aynı geriye dönük çıkarım argümanıyla oyuncu atış yapmalıdır.

Ders 1. Birçok oyunda, önemli olan karar ne yapılması değil ne zaman yapılması gerektiğidir. Benzer bir örnek yeni bir ürün lansmanında şöyleykendir: tek bir ürürnün hayatta kalacağını bilirsiniz, rakip de bir ürün geliştirmektedir ve eğer mükemmel olmayan bir ürünü çok erken piyasaya sürerseniz ve başarısız olursa itibarınız zarar görür.

Ders 2. Bu oyun zordur, ama eğer kafamızı toplarsak, geriye dönük çıkarım basit bir çözüm ortaya koyar, kabaca, daha iyi veya daha kötü atıcı olmanızdan bağımsız olarak, **vuruş olasılıklarının toplamı 1 olduğunda atış yapın.**