14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

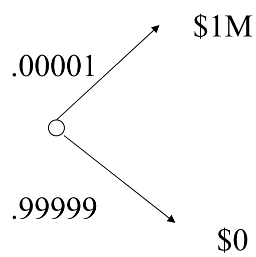
Ders 3: Oyunların Gösterimi

Yol haritası

1. Kardinal temsiliyet - Beklenen değer teorisi
2. **Ufak sınav**
3. Oyunların normal ve geniş biçimde gösterilmeleri
4. Dominantlık (Baskınlık), dominant-strateji dengesi

Kardinal temsiliyet - tanımlar

- Z= sonlu bir ödüller ya da sonuçlar kümesi
- Bir lotarya Z üzerine bir olasılık dağılımıdır.
- P = tüm lotaryalar kümesi
- Bir lotarya:



Kardinal temsiliyet

- Von Neumann-Morgenstern temsiliyeti:

$$p \succeq q \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{z \in Z} u(z)p(z)}_{U(p)} \geq \underbrace{\sum_{z \in Z} u(z)q(z)}_{U(q)}$$

bir lotarya (P'de) u'nun p altındaki beklenen değeri

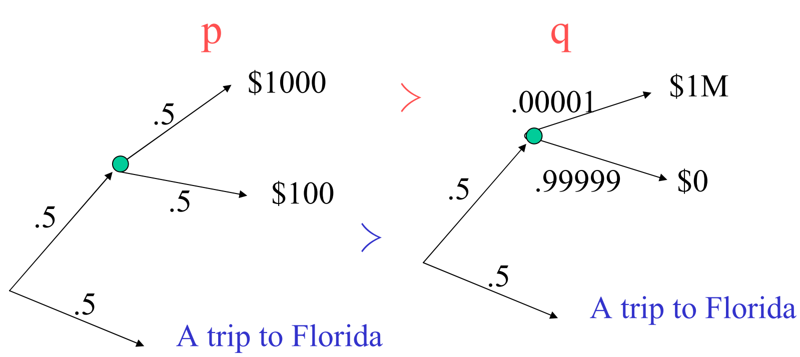
VNM aksiyomları

Aksiyom A1: $\succeq$ tam ve geçişkendir.

VNM aksiyomları

Aksiyom A2 (Bağımsızlık): Herhangi $p, q, r \in P$ için ve herhangi $a \in (0, 1]$ için,

$ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)r \iff p \succ q.$



VNM aksiyomları

Aksiyom A3 (Süreklilik): Herhangi $p, q, r \in P$ için, eğer $p \succ r$ ise, öyle iki $a, b \in (0, 1)$ vardır ki,

$ap + (1 - a)r \succ q \succ bp + (1 - r)r$ sağlanır.

Teorem - VNM temsiliyeti

P üzerine bir ilişki, $\succeq$, $u : Z \to R$ şeklinde bir von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonu ile temsil edilebilir, ancak ve ancak, $\succeq$ A1-A3'ü sağlıyorsa.

u ve $\tilde{u}$ aynı tercih ilişkisini temsil ederler, ancak ve ancak, $\tilde{u} = au + b$ ise, bazı $a > 0$ ve $b \in \mathbb{R}$ için.

Alıştırma

- Reel sayılar üzerine tanımlı veVNM fayda fonksiyonu $u(x) = x^2$ ile temsil edilen bir $\succeq$ ilişkisi düşünün.

  Bu ilişki VNM fayda fonksiyonu $u^*(x) = x^{1/2}$ ile temsil edilebilir mi?

  Ya $u^*(x) = 1/x$ ile temsil edilebilir mi?

Normal biçim gösterimi

Tanım (Normal biçim): Bir oyun $G = (S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n)$ şeklinde bir listedir, öyle ki, her $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ için,

S_i oyuncu i için mevcut tüm strajeilerin kümesidir,

$u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ oyuncu i'nin von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyounudur.

Varsayım: G ortak bilgidir.

Tanım: Bir i oyuncusu rasyoneldir ancak ve ancak inanışları veriliyken u_i'nin beklenen değerinin maksimize ediyorsa.

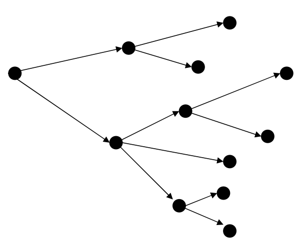
Tavuk

(-1,-1)	(1,0)
(0,1)	(1/2,1/2)

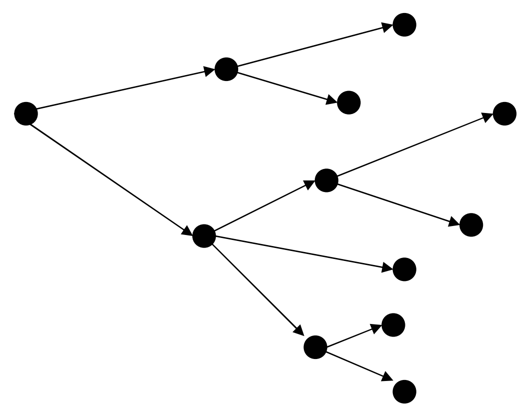
Extansif/geniş biçim gösterimi

Tanım: Bir *oyun ağacı* karar noktaları ve bu noktaları birleştiren yönlü kenarlar kümesidir, öyle ki,

1. bir ilk nokta vardır, bu noktaya gelen bir kenar yoktur;
2. diğer tüm noktalar için, tek bir gelen kenar vardır;
3. herhangi iki nokta için, bu iki noktayı birleştiren tek bir yol vardır.



Bir Ağaç



Extansif/geniş biçim - tanım

Tanım: Bir *oyun*

- bir oyuncular kümesini
- bir oyun ağacını
- ağacın her noktasının (son noktalar hariç) bir oyuncuya dağıtılımını
- bir bilgi yapısını
- tüm son noktalarda her oyuncunun kazancını

içerir.

Bilgi kümesi

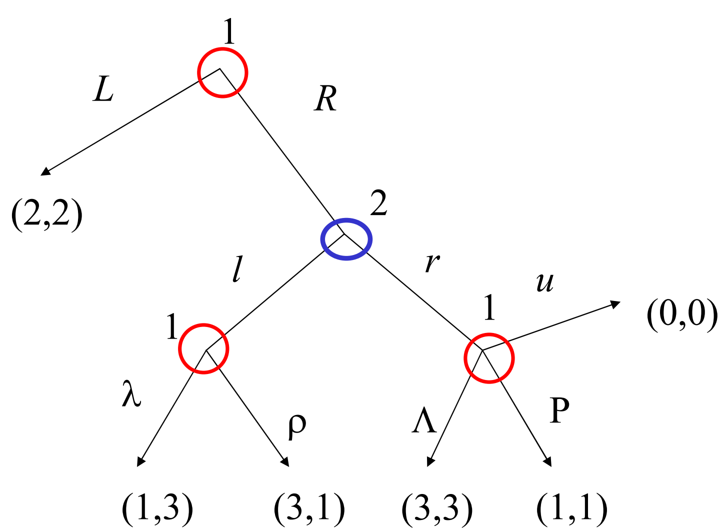
Bir **bilgi kümesi**, bir noktalar kümesidir, öyle ki,

1. tüm bu noktalarda aynı oyuncu, i, oynar;

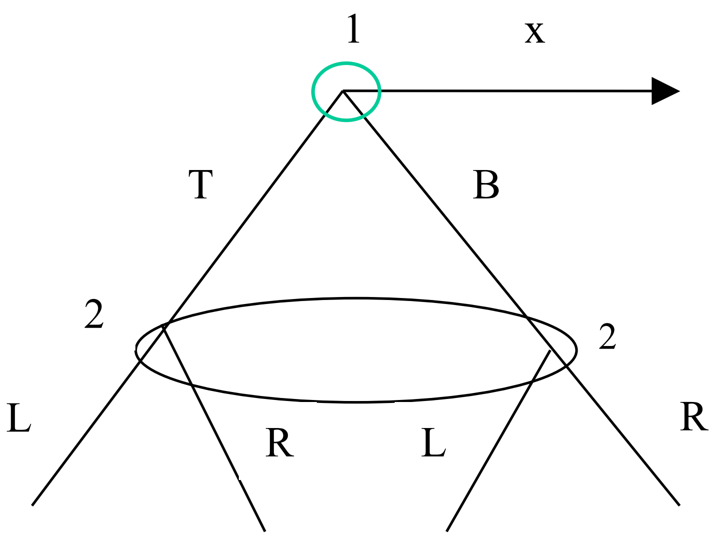
2. tüm bu noktalarda aynı hamleler mevcuttur.

Bir **bilgi yapısı** oyun ağacındaki her bir noktanın (ilk ve son noktalar hariç) bir bilgi kümesine dağılımıdır.

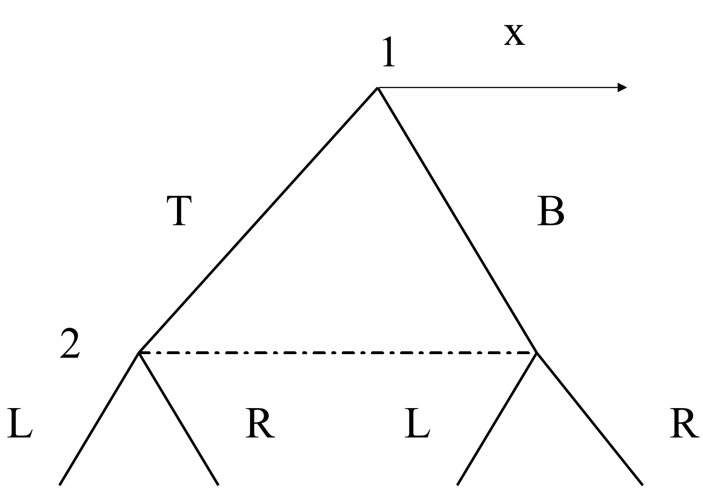
Bir oyun



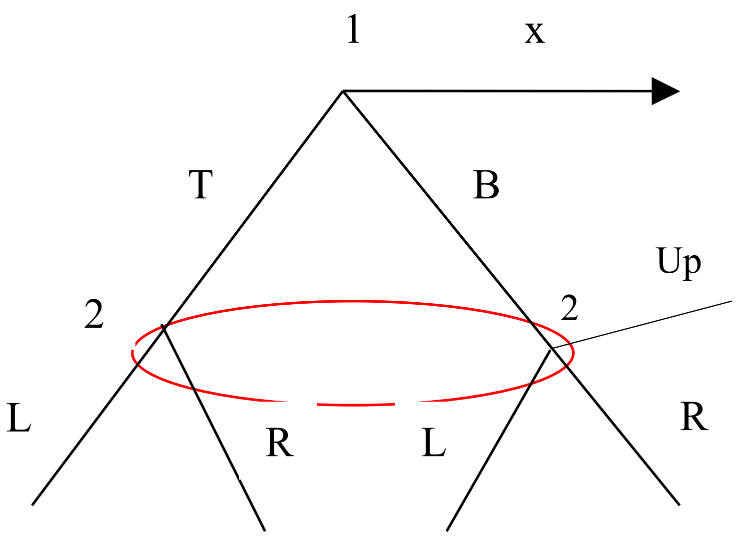
Bir başka oyun



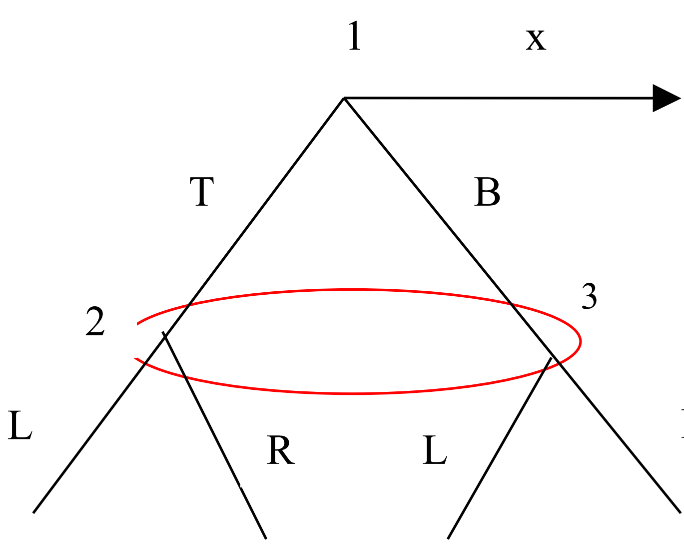
Aynı oyun



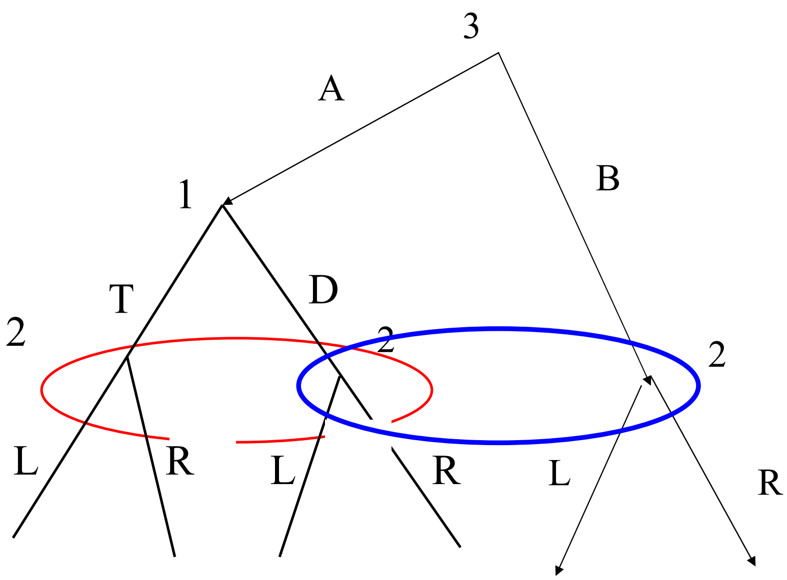
Sorun ne?



Sorun ne?



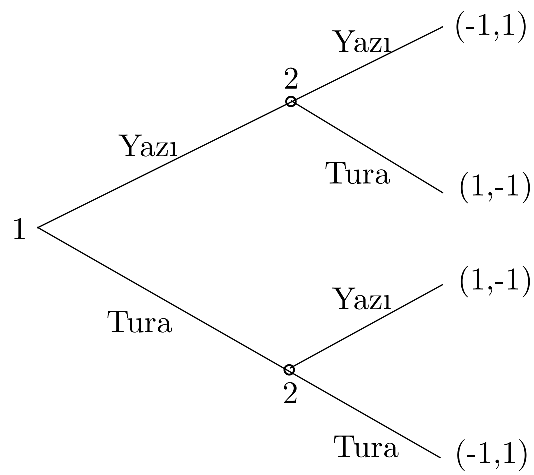
Sorun ne?



Strateji

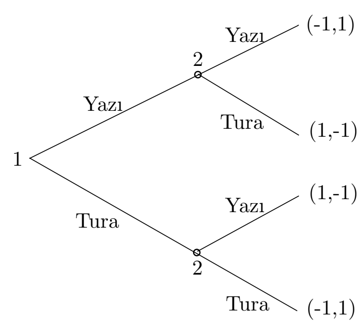
Bir oyuncu için bir **strateji**, oynayacağı her bir bilgi kümesinde (bu stratejiye göre ulaşılmayacak bilgi kümelerinde dahi) hangi eylemi seçeceğini belirten bir **eksiksiz arızi** (meydana gelebilecek olaylara bağlı) **plandır**.

Kusursuz bilgili yazı-tura eşleştirme oyunu

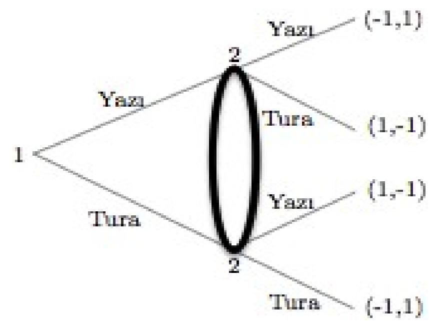


Kusursuz bilgili yazı-tura eşleştirme oyunu

	YY	YT	TY	TT
Yazı	-1,1	-1,1	1,-1	1,-1
Tura	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1

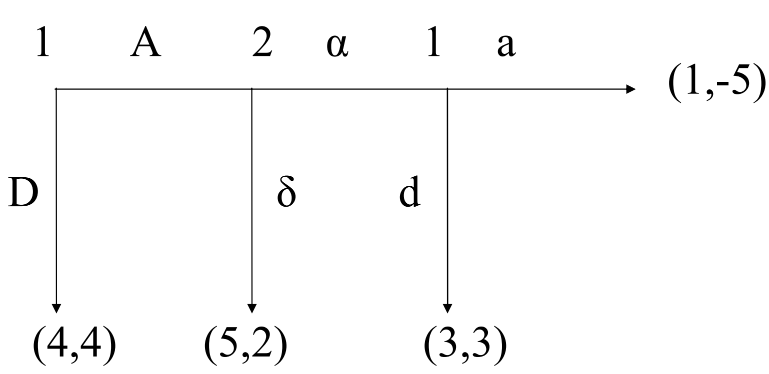


Kusurlu bilgili yazı-tura eşleştirme oyunu

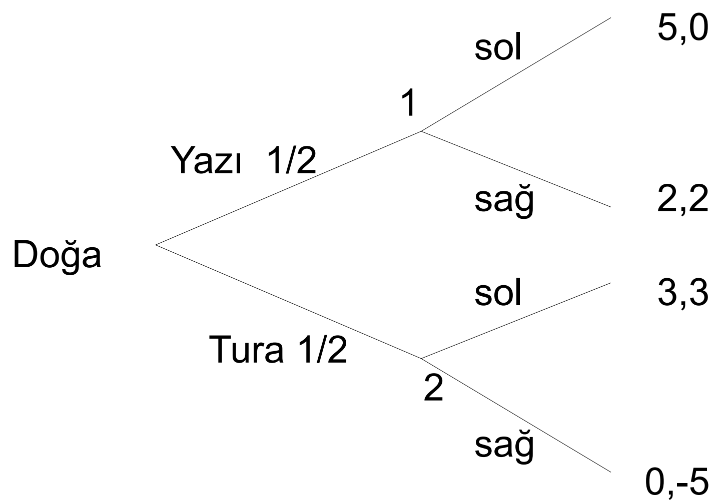


1/2	Yazı	Tura
Yazı	-1,1	1,-1
Tura	1,-1	-1,1

Bir oyun



Doğalı bir oyun



Karma Strateji

Tanım: Bir oyunucu için **karma strateji** kendi stratejileri üzerine olan bir olasılık dağılımıdır.

Saf stratejiler: $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ik}\}$

Bir karma strateji: $\sigma_i : S \to [0,1]$ öyle ki

$\sigma_i(s_{i1}) + \sigma_i(s_{i2}) + \cdots + \sigma_i(s_{ik}) = 1.$

Eğer diğer oyuncular $s_{-i} = (s_1, ...s_{i-1}, s_{i+1}, ...s_n)$ oynarsa, o zaman σ_i oynamaktan gelen beklenen fayda

$$\sigma_i(s_{i1})u_i(s_{i1},s_{-i}) + \sigma_i(s_{i2})\, u_i(s_{i2},s_{-i}) + \ldots + \sigma_i(s_{ik})\, u_i(s_{ik},s_{-i})$$

dır.

.

Nasıl oynamalı?

Dominantlık

$$s_{-i} = (s_1, ...s_{i-1}, s_{i+1}, ...s_n)$$

Tanım: Bir s_i^* stratejisi s_i stratejisnin **kesin domine eder (baskındır)** ancak ve ancak

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Bir karma strateji σ_i, s_i stratejisini **kesin domine eder (baskındır)** ancak ve ancak,

$$\sigma_i(s_{i1})u_i(s_{i1}, s_{-i})+\sigma_i(s_{i2})u_i(s_{i2}, s_{-i})+\cdots \sigma_i(s_{ik})u_i(s_{ik}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Rasyonel bir oyuncu asla kesin domine edilen bir stratejiyi oynamaz.

Tutuklular İkilemi

1/2	itiraf et	itiraf etme
itiraf et	-5,-5	0,-6
itiraf etme	-6,0	-1,-1

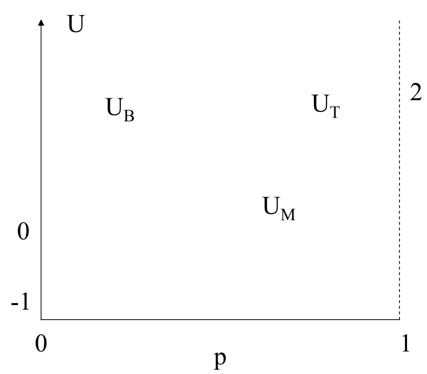
Bir oyun

	L	R
T	(2,0)	(-1,1)
M	(0,10)	(0,0)
B	(-1,-6)	(2,0)
	p	1-p

U_M

$U_T =$

$U_B =$



Zayıf Dominantlık

Tanım: Bir s_i^* stratejisi s_i stratejisini **zayıf domine eder** ancak ve ancak

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

ve en az bir eşitsizlik kesindir. Bir karma strateji σ_i^*, s_i stratejisini **zayıf domine eder** ancak ve ancak,

$$\sigma_i(s_{i1})u_i(s_{i1}, s_{-i}) + \sigma_i(s_{i2})u_i(s_{i2}, s_{-i}) + \cdots \sigma_i(s_{ik})u_i(s_{ik}, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

ve en az bir eşitsizlik kesindir.

Eğer bir oyuncu rasyonelse ve ihtiyatlıysa (yani, diğer oyuncunun her stratejisine pozitif olasılık atar), o zaman asla zayıf domine edilen bir strateji oynamaz

Dominant Strateji dengesi

Tanım: Bir s_i^* stratejisi i oyuncusu için bir **dominant stratejidir** ancak ve ancak s_i^* i oyuncusunun diğer tüm stratejilerini zayıf domine ediyorsa.

Tanım: Bir strateji vektörü, s^*, bir **dominant strateji dengesidir**, ancak ve ancak, s_i^* her i oyuncusu için bir dominant stratejidir.

Bir dominant strateji dengesi varsa, oynanacaktır, ancak ve ancak oyuncular ...

Tutuklular İkilemi

1/2	itiraf et	itiraf etme
itiraf et	-5,-5	0,-6
itiraf etme	-6,0	-1,-1

İkinci-fiyat ihalesi

- $N = \{1, 2\}$ alıcılar kümesidir;
- i oyuncusu için evin değeri v_i'dir;
- Her oyuncu i eş zamanlı olarak b_i teklif eder;
- $b_{i^*} = max\ b_i$ teklifini veren i^* evi alır ve ikinci en yüksek teklifi, $p = max_{j \neq i} b_j$, öder.

Bir oyun

	L	R
T	(2,0)	(-1,1)
M	(0,10)	(0,0)
B	(-1,-6)	(2,0)
	p	1-p