

14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ders 2: Seçim Teorisi

Yol haritası

1. Temel konseptler (alternatifler, tercihler,..)
2. Tercihlerin ordinal temsiliyeti
3. Tercihlerin kardinal temsiliyeti - Beklenen fayda teorisi
4. Uygulamalar: Risk paylaşımı ve Sigorta
5. **Ufak sınav**

Temel konseptler: Alternatifler

- Ajan alternatifler arasından seçimini yapar
- X =alternatifler kümesi
- Alternatifler
 - birbirini dışlayan ve
 - eksiksizdir

Örnek

- Seçenekler=Kahve, Çay
- $X=\{$
- $\Ç=\Çay$
- $K=Kahve$
- $\ÇK=\Çay$ ve $Kahve$
- $NN=Ne$ Kahve Ne Çay $\}$

Temel konseptler: Tercihler

- Bir ilişki (matematiksel bağıntı), \succeq , (X üzerine) $X \times X$ kümesinin bir alt kümesidir.
- yani,
$$\succeq^* = \{(\zeta, K), (\zeta, K\zeta), (\zeta, NN), (K, K\zeta), (K, NN), (NN, K\zeta)\}$$
- $\zeta \succeq K \equiv (\zeta, K) \in \succeq$
- \succeq ilişkisi *tam*'dır, ancak ve ancak, $\forall x, y \in X$ için,

$$x \succeq y \text{ ya da } y \succeq x.$$

- \succeq ilişkisi *geçişken*'dir, ancak ve ancak, $\forall x, y, z \in X$ için,

$$[x \succeq y \text{ ve } y \succeq z] \Rightarrow x \succeq z.$$

Tercih İlişkisi

Tanım: Bir ilişki tercih ilişkisidir ancak ve ancak tam ve geçişkense.

Örnekler

Bu sınıftaki öğrenciler için alttaki gibi ilişkiler tanımlayın

- $x T y$ ancak ve ancak x y kadar uzunsa;
- $x M y$ ancak ve ancak x 'in 14.04'teki final notu en az y 'ninki kadarsa;
- $x H y$ ancak ve ancak ikisi de aynı liseye gitmişlerse;
- $x Y y$ ancak ve ancak x y 'den kesin daha genç ise;
- $x S y$ ancak ve ancak x en az y kadar yaşlı ise;

Başka ilişkiler

- Kesin ilişki:

$$x \succ y \iff [x \succeq y \text{ ve } y \not\succeq x],$$

- Kayıtsızlık ilişkisi:

$$x \sim y \iff [x \succeq y \text{ vey } \succeq x].$$

Örnekler

Bu sınıftaki öğrenciler için alttaki gibi ilişkiler tanımlayın

- $x T y$ ancak ve ancak x y kadar uzunsa;
- $x M y$ ancak ve ancak x 'in 14.04'teki final notu en az y 'ninki kadarsa;
- $x H y$ ancak ve ancak ikisi de aynı liseye gitmişlerse;
- $x Y y$ ancak ve ancak x y 'den kesin daha genç ise;
- $x S y$ ancak ve ancak x en az y kadar yaşlı ise;

Ordinal temsiliyet

Tanım: Bir ilişki, \succeq , $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ ile temsil edilebilir, ancak ve ancak

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y) \quad \forall x, y \in X. \text{ (OT)}$$

Örnek

$$\succeq^{**} = \{(\zeta, K), (\zeta, K\zeta), (\zeta, NN), (K, K\zeta), (K, NN), (NN, K\zeta), (K, K), (\zeta, \zeta), (K\zeta, K\zeta), (NN, NN)\}$$

u^{**} ile temsil edilir öyle ki

$$u^{**}(K) = 4$$

$$u^{**}(\zeta) = 1500$$

$$u^{**}(K\zeta) = 0$$

$$u^{**}(NN) = \pi$$

Alıştırmalar

- Bir yuvarlak masa etrafında oturmuş bir grup öğrenci düşünün. R adında bir ilişki tanımlayın, öyle ki, $x R y$ ancak ve ancak x y 'nin sağında oturuyor olsun. Bu ilişkiyi bir fayda fonksiyonu ile temsil edebilir misiniz?
- Reel sayılar üzerine tanımlı ve $u(x) = x^2$ ile temsil edilen bir \succeq ilişkisi düşünün.
Bu ilişki $u^*(x) = x^{1/2}$ ile temsil edilebilir mi?
Ya $u^*(x) = 1/x$ ile temsil edilebilir mi?

Teorem

X sonlu (veya sayılı) olsun. Bir ilişki \succeq bir U fayda fonksiyonu tarafından OT anlamında temsil edilebilir, ancak ve ancak, ilişki tercih ilişkisiyse.

Eğer $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, \succeq ilişkisini temsil ediyorsa ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir kesin artan fonksiyon ise, o zaman $f \circ u$ da \succeq ilişkisini temsil eder.

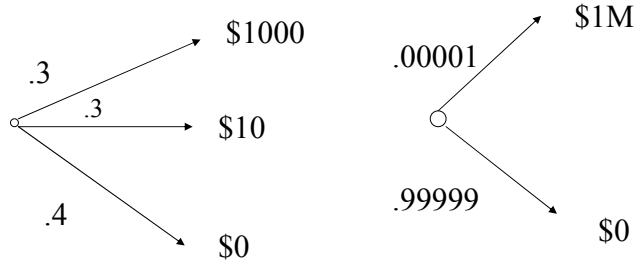
Tanım: Bir ilişki, \succeq , $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ ile temsil edilebilir, ancak ve ancak

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y) \quad \forall x, y \in X. \text{ (OT)}$$

Bir Lotarya

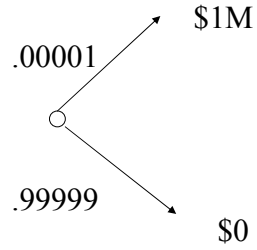
Telif hakları* sebebiyle klip kaldırılmıştır.

İki Lotarya



Kardinal temsiliyet - tanımlar

- Z = sonlu bir ödüller ya da sonuçlar kümesi
- Bir lotarya Z üzerine bir olasılık dağılımıdır.
- P = tüm lotaryalar kümesi
- Bir lotarya:



Kardinal temsiliyet

- Von Neumann-Morgenstern temsiliyeti:

$$p \succeq q \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{z \in Z} u(z)p(z)}_{U(p)} \geq \underbrace{\sum_{z \in Z} u(z)q(z)}_{U(q)}$$

bir lotarya (P'de) u'nun p altındaki beklenen değeri

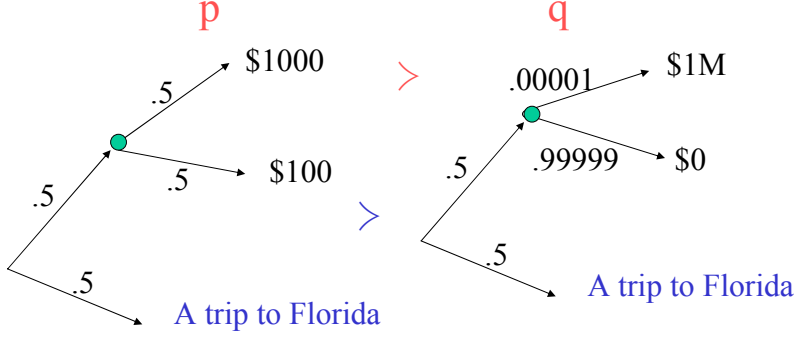
VNM aksiyomları

Aksiyom A1: \succeq tam ve geçişkendir.

VNM aksiyomları

Aksiyom A2 (Bağımsızlık): Herhangi $p, q, r \in P$ için ve herhangi $a \in (0, 1]$ için,

$$ap + (1 - a)r \succ aq + (1 - a)r \iff p \succ q.$$



VNM aksiyomları

Aksiyom A3 (Süreklilik): Herhangi $p, q, r \in P$ için, eğer $p \succ r$ ise, öyle iki $a, b \in (0, 1)$ vardır ki,

$$ap + (1 - a)r \succ q \succ bp + (1 - r)r \text{ sağlanır.}$$

Teorem - VNM temsiliyeti

P üzerine bir ilişki, \succeq , $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonu ile temsil edilebilir, ancak ve ancak, \succeq A1-A3'ü sağlıyorsa.

u ve \tilde{u} aynı tercih ilişkisini temsil ederler, ancak ve ancak, $\tilde{u} = au + b$ ise, bazı $a > 0$ ve $b \in \mathbb{R}$ için.

Alıştırma

- Reel sayılar üzerine tanımlı ve VNM fayda fonksiyonu $u(x) = x^2$ ile temsil edilen bir \succeq ilişkisi düşünün.

Bu ilişki VNM fayda fonksiyonu $u^*(x) = x^{1/2}$ ile temsil edilebilir mi?

Ya $u^*(x) = 1/x$ ile temsil edilebilir mi?

Riske karşı tutumlar

- Bir adil kumar:

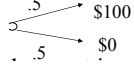
$$\begin{array}{c} \nearrow^p x \\ \searrow_{1-p} y \end{array} \quad px+(1-p)y=0.$$

- Bir ajan *risk-nötr*'dür, ancak ve ancak, ajan tüm adil kumarları kabul edip etmemek arasında kayıtsızsa.
- Bir ajan (*kesin*) *risk-sevmeyen*'dir, ancak ve ancak, ajan tüm adil kumarları reddediyorsa.
- Bir ajan (*kesin*) *risk-seven*'dir, ancak ve ancak, ajan tüm adil kumarları kabul ederse.

- Bir ajan *risk-nötr*'dür, ancak ve ancak, fayda fonksiyonu lineerse, yani $u(x) = ax + b$
- Bir ajan (*kesin*) *risk-sevmeyen*'dir, ancak ve ancak, fayda fonksiyonu dış-bükeydir.
- Bir ajan (*kesin*) *risk-seven*'dir, ancak ve ancak, fayda fonksiyonu iç-bükeydir.

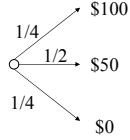
Risk paylaşımı

- İki ajan, herikisi de $u(x) = \sqrt{x}$ fayda fonksiyonu ve bir varlığa sahipler



- Her ajan için, varlığın değeri 5 olsun.
- Varlığın değeri bağımsız dağılmış olsun.

- Eğer ortak bir fon oluştururlarsa öyle ki her ikisi de varlığın yarısına sahip olsunlar, o zaman herbiri



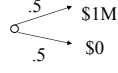
alır.

- Ortak fonun her ajan için değeri

$$\frac{1}{4}\sqrt{100} + \frac{1}{2}\sqrt{50} + \frac{1}{4}\sqrt{0} \approx 10/4 + 7/2 = 6 \text{ dir.}$$

Sigorta

- $u(x) = \sqrt{x}$ fayda fonksiyonlu bir ajan var ve



- Ve P primine sigorta satan, çok parası olan bir risk-nötr bir sigorta şirketi olsun

Sigorta -devamı

- Ajan P_A primini ödemeye razıdır öyle ki

$$\begin{aligned} (1M - P_A)^{1/2} &\geq (1/2)(1M)^{1/2} + (1/2)(0)^{1/2} \\ &= 500 \end{aligned}$$

$$P_A \leq \$1M - \$250K = \$750K.$$

- Sigorta şirketi ise alttaki primi kabul etmeye razıdır

$$P_I \geq (1/2)(1M) = \$500K.$$

Ufak sınav sorusu

- Kimseyle konuşmadan, her öğrenci bir kağıda 0 ile 100 arasında bir reel sayı x_i yazsın ve asistana versin.
- Asistan averajı hesaplayacak

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

- Bir öğrencinin notu $100 - |x_i - 2\hat{x}|/3$ olacak, öyle ki, öğrencinin yazdığı sayıdır.