14.12 Oyun Teorisi Ders Notları

Muhamet Yıldız

Ders 7-9

Bu derste, (tam bilgili) dinamik oyunları inceleyeceğiz. Öncelikle, her bilgi kümesinin tek elemanlı olduğu kusursuz bilgili oyunları analiz edeceğiz ve geriye doğru tümevarım kavramını geliştireceğiz. Daha sonra ise, daha genel dinamik oyunları ele alıp, alt-oyunlu mükemmel denge kavramını irdeleyeceğiz. Bu kavramları, Gibbons'da çoğunu bulabileceğiniz ekonomik problemler üzerinde açıklayacağız.

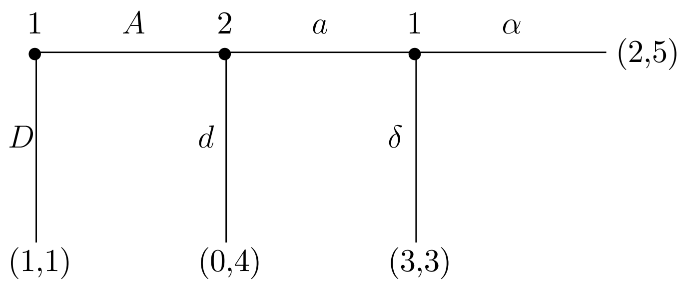
1 Geriye doğru tümevarım

Geriye doğru tümevarm kavramı her oyuncunun sırası geldiğinde karar noktasında akılcı davranacağının ortak bilgi olduğu varsayımına denk gelir - oyuncunun akılcı olması o karar noktasına ulaşılmasına engel olsa bile.[1] Mekanik olarak, şöyle hesaplanır. Bir sonlu kusursuz bilgi oyunu düşünelim. Son noktalardan hemen önce gelen bir karar noktası düşünelim, yani, bu karar noktasından çıkan her bir eylemden sonra oyun biter. Eğer böyle bir karar noktasında oynayacak olan bir oyuncu akılcı davranırsa, kendisi için en iyi eylemi seçmelidir. Dolayısıyla, bu noktada bu oyuncuya en yüksek kazancı getirecek eylemi seçiyoruz. Elimizdeki bu karar noktasına, seçtiğimiz eylemin getirdiği kazanç vektörünü atıyoruz ve bu noktadan çıkan tüm eylemleri siliyoruz ve daha küçük bir oyun kalıyor elimizde, öyle ki, bu elimizdeki karar noktası artık bir son nokta oluyor. Bu prosedürü, oyunun başlangıcına ulaşana kadar tekrarlayalım.

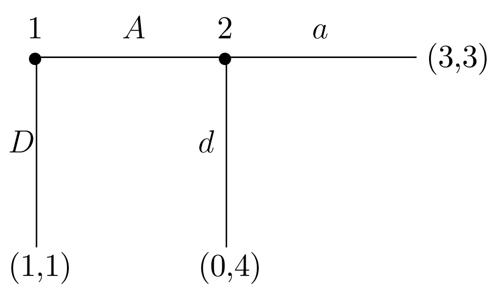
[1] Daha açık olarak: her bir i karar noktasında, oyuncu, i'yi takip eden bütün diğer j karar noktalarında bütün diğer oyuncuların akılcı davranacağından emindir; ve her bir i noktasında, oyuncu, i'yi takip eden bütün diğer j karar noktalarında oynayacak oyuncunun diğer tüm oyuncuların j'yi takip eden tüm k karar noktalarında akılcı davranacağından emin olduğundan emindir,... sürgit.

Örnek İyi bilinen, *kırkayak oyununu (the centipede game)*, düşünelim. Bu oyun, tüm oyuncuların ilişki içinde kalmasının, her iki oyuncunun da yararına olduğu, ancak bir oyunucunun diğer oyuncunun ertesi gün ilişkiden çıkacağını bildiği durumda ilişkiden çıkmak isteyeceği bir durumu anlatmaktadır.

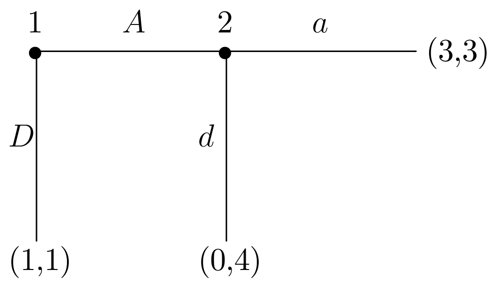
§



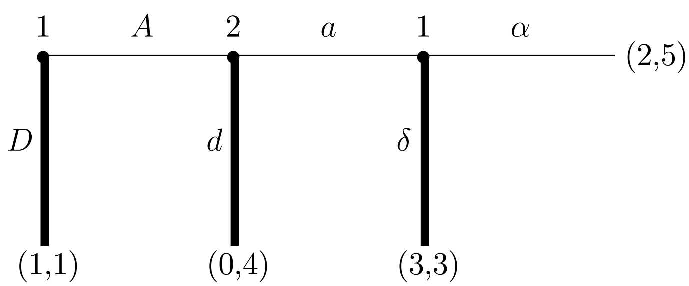
Üçüncü gün, 1. oyuncu oynar ve devam etmek (α) ile aşağıya inmek (δ) arasında seçim yapar. Eğer devam ederse, 2 kazanır, eğer aşağıya inerse, 3 kazanır. Dolayısıyla, aşağıya inmelidir. İndirgenmiş oyun alttaki gibidir:



İkinci gün, 2. oyuncu oynar ve devam etmek (a) ile aşağıya inmek (d) arasında seçim yapar. Devam ederse, 3 kazanır; aşağıya inerse, 4 kazanır. Dolayısıyla, aşağıya inmelidir. Daha da indirgenmiş oyun alttaki gibidir:



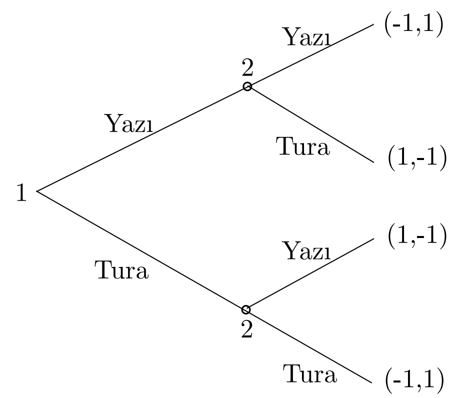
Şimdi, 1. oyuncu eğer devam ederse (A), 0 kazanır; aşağıya inerse, 1 kazanır. Dolayısıyla, aşağıya iner. Oluşturduğumuz denge alttaki gibidir:



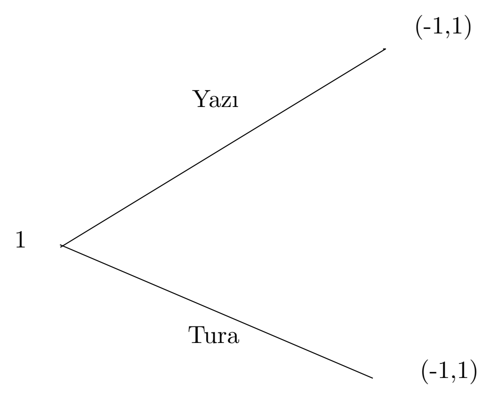
Başka bir deyişle, her karar noktasında, o noktada kim oynuyorsa, aşağıya inerek ilişkiden çıkmış olur. 1. oyuncunun son gün akılcı davranacağını varsaydık, bu da aşağıya ineceği çıkarımında bulunmamızı sağladı. 2. oyuncunun ikinci gün aşağıya ineceği çıkarımını yaparken de, 2. oyuncunu 1. oyuncunun üçüncü gün akılcı davranacağını varsaydığını ve kendisinin de akılcı olduğunu varsaydık. Birinci gün, 1. oyuncu tüm bunların ayırdına varır. Yani, 1. oyuncunun 2. oyuncunun akılcı olduğunu bildiğini ve 2. oyuncunun 1. oyuncunun üçüncü gün akılcı davranacağına inandığını bildiğini varsayıyoruz.

Bu örnek geriye doğru tümevarımla ilişkili başka bir kavramı da betimlemektedir - taahhüt (ya da taahhüt eksikliği). Belirtelim ki, üçüncü günkü sonuçların (yani, (3,3) ve (2,5)) ikisi de dengede çıkan (1,0) sonucundan kesin daha iyidir. Ancak, daha iyi olan bu sonuçlara ulaşamamaktadırlar, çünkü 2. oyuncu devam etme taahhütü verememektedir ve 2. oyuncunun aşağıya ineceğini öngören 1. oyuncu da ilk günden ilişkiden çıkar. Bu örnekte bir başka taahhüt problemi daha vardır. Eğer 1. oyuncu üçüncü gün devam etmeyi taahüt edebilseydi, o zaman 2. oyuncu ikinci gün kesinlikle devam ederdi. Bu durumda, 1. oyuncu ilk gün devam etmeyi seçerdi. Tabiki, 1. oyuncu üçüncü gün devam etmeyi taahhüt edemez ve oyun ilk gün sona erer ve (1,0)'lık düşük kazançlar sağlanır.

Bir başka örnek olarak, geriye doğru tümevarımı kusursuz bilgili yazı-tura eşleştirme oyununa uygulayalım:



Eğer 1. oyuncu Yazıyı seçerse, 2. oyuncu da Yazıyı seçer; eğer 1 Turayı seçerse, 2 de Turayı seçer. Dolayısıyla, indirgenmiş oyun



şeklindedir.

Bu durumda, 1. oyuncu Yazı ve Tura arasında kayıtsız olacaktır, bu iki seçenek veya bu iki eylem arasında herhangi bir rastgele seçim arasından seçmek bize geriye doğru tümevarım dengesini verir.

Bu noktada, durup Gibbons'daki Stackelberg duopolisini çalışmalısınız. Ayrıca, bu oyunda, takip edenin, liderin ne ürettiğinden bağımsız olarak, Cournot miktarını ürettiği ve liderin de Cournot miktarını ürettiği bir Nash dengesinin var olduğunu kontrol ediniz. Tabiki, bu geriye doğru tümevarım ile tutarlı bir denge değil: takip eden oyuncu liderin Stackelberg miktarını ürettiğini öğrendiği zaman, fikrini değiştirip, geriye doğru tümevarım yoluyla hesaplanan daha düşük bir miktar üretecektir. Bu nedenle, bu Nash dengesi (takip edenin) güvenilir olmayan bir tehdidi üzerine inşa edilmiştir.

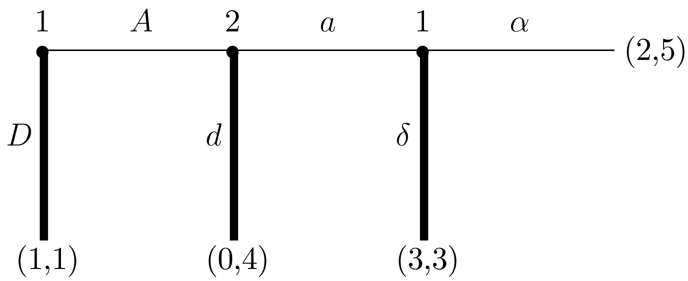
Geriye doğru tümevarım sezgisel altyapısı güçlü bir çözüm yoludur. Maalesef, sonlu ve kusursuz bilgili oyunlar dışında uygulama alanı yoktur. Öte yandan, bu sezgisel altyapı, bu tip oyunlar dışında alt-oyun mükemmel dengesiyle genelleştirilebilir.

2 Alt-oyun mükemmel Nash dengesi

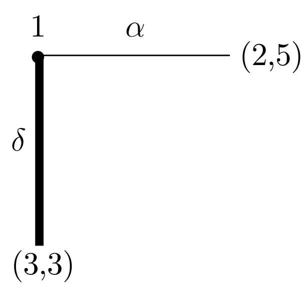
Geriye doğru tümevarım yönteminin temel bir özelliği, oyunun bir alt-oyununa baktığımızda, geriye doğru tümevarımla hesapladığımız dengenin bu alt-oyunda da (yine geriye doğru tümevarmla hesaplanan) denge olarak kalmasıdır. Alt-oyun mükemmel denge kavramı bu nosyonu genel dinamik oyunlara geneller:

Tanım 1 *Bir Nash dengesi* alt-oyun mükemmeldir*, ancak ve ancak, oyunun her alt-oyununda bir Nash dengesidir.*

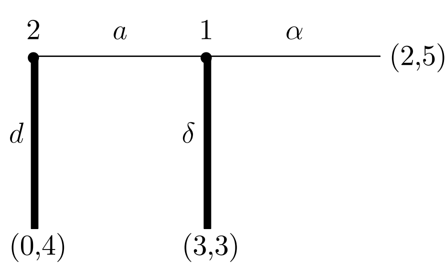
Alt-oyun nedir? Herhangi bir oyunun içine gömülmüş, daha küçük oyunlar mevcut olabilir ve bu tip gömülmüş oyunlara alt-oyun diyoruz. Mesela, kırkayak oyununu düşünelim (denge kalın çizgilerle çizilmiştir):



Bu oyunun üç tane alt-oyunu vardır. Bunlardan bir tanesi şöyledir:



Bir başka alt-oyun ise:

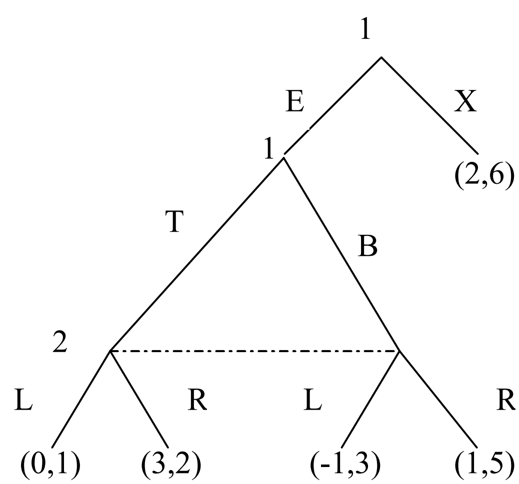


dir.

Üçüncü alt-oyun ise oyunun kendisidir. İlk iki alt-oyuna (oyunun kendisi dışındaki alt-oyunlara) öz alt-oyun diyoruz. Geriye doğru tümevarımla hesaplanan denge, her bir alt-oyunda, o alt-oyunun dengesi olmaya devam eder.

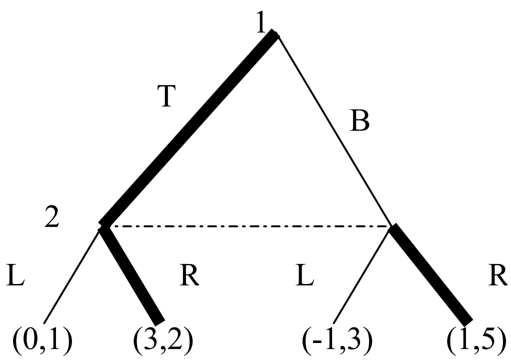
Şimdi, kusursuz bilgili yazı-tura eşleştirme oyununu düşünelim. Bu oyunda, üç alt-oyun vardır: 1. oyuncunun Yazı seçmesinden sonra gelen oyun, 1. oyuncunun Tura seçmesinden sonra gelen oyun ve oyunun kendisi. Tekrarlarsak, geriye doğru tümevarımla hesaplanan denge her bir alt-oyunda da Nash dengesidir.

Şimdi sıradaki oyunu düşünelim.

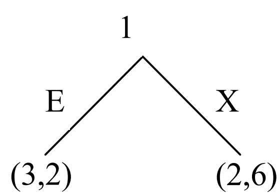


Bu oyunda geriye doğru tümevarım uygulayamayız, çünkü bu oyun kusursuz bilgi oyunu değildir. Ama, alt-oyun mükemmel dengesini hesaplayabiliriz. Oyunda iki tane alt-oyun vardır: 1. oyuncunun E oynamasından sonra gelen oyun ve oyunun kendisi. Alt-oyun mükemmel dengesini şöyle hesaplıyoruz: Önce alt-oyunun bir Nash dengesini buluyoruz, sonra (bu alt-oyundaki) denge eylemlerini sabitleyerek ve bu alt-oyundaki denge kazançlarını alt-oyuna girmekten gelecek kazançlar olarak alarak, geriye kalan oyunda Nash dengesini hesaplıyoruz.

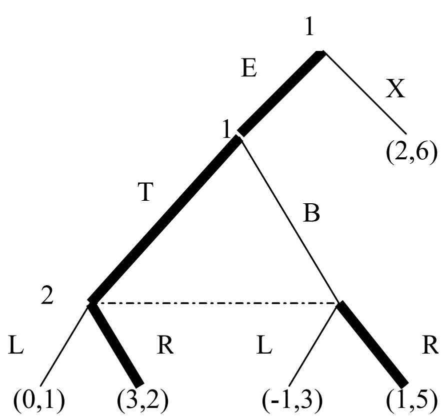
Alt-oyunda sadece bir tane Nash dengesi var, çünkü T, B'yi domine ediyor: 1. oyuncu T oynar ve 2. oyuncu da R oynar, kazanç vektörü de (3,2)'dir.



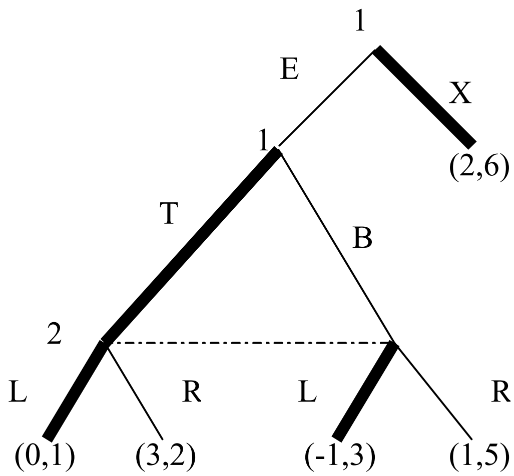
Bu sayede, geriye kalan oyun



şeklindedir, öyle ki, 1. oyuncu E'yi seçer. Dolayısıyla, alt-oyun mükemmel dengesi alttaki gibidir.

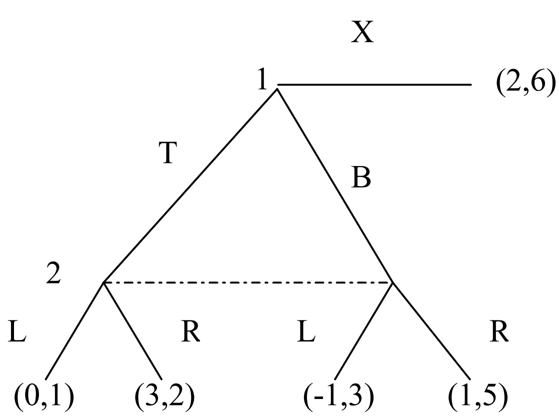


Belirtelim ki, başka Nash dengeleri de vardır; bir tanesi altta çizilmiştir.

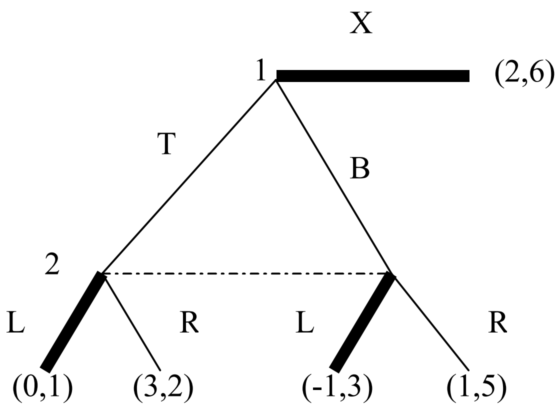


Bunun Nash dengesi olduğunu kontrol edebiliyor olmalısınız. Ancak bu denge alt-oyun mükemmel değildir, çünkü, öz alt-oyunda, 2. oyuncu kesin domine edilen bir strateji oynamaktadır.

Şimdi, yukarıdaki oyuna aslen çok benzeyen ama 1. oyuncunun seçimini bir kerede yapması gibi ufak bir farka sahip, sıradaki oyuna bakalım:



Bu oyunun tek alt-oyunu kendisidir, dolayısıyla tüm Nash dengeleri birer alt-oyun mükemmeldir. Özellikle, yukarıdaki oyunda alt-oyun mükemmel Nash dengesi olmayan denge burada alt-oyun mükemmeldir. Bu yeni oyunda, bu denge alttaki şekildedir.



Bu noktada okumayı bırakıp "gümrük vergileri (tariffs) ve tam olmayan uluslararası rekabet" konusunu çalışmalısınız.

3 Ardaşık pazarlık

Farz edelim ki, iki oyuncunun, ancak nasıl paylaşacaklarına karar verdikten sonra kullanabilecekleri, bir TL'si olsun. Her oyuncu da risk-kayıtsız olsun ve geleceği eksponensiyel bir şekilde iskonto etsin. Başka bir deyişle, eğer t gününde, x TL edinirse, bundan alacağı fayda $\delta^t x$'dir, bir $\delta \in (0,1)$ için. Tüm olası paylaşımlar, $D = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 \,|x + y \leq 1\right\}$ kümesidir. Şöyle bir senaryo düşünelim. İlk gün, 1. oyuncu bir teklifte bulunur, $(x_1, y_1) \in D$. Sonra, teklifi gören 2. oyuncu, teklifi kabul eder ya da reddeder. Eğer teklifi kabul ederse, teklif hayat geçirilir ve kazançlar (x_1, y_1) şeklinde olur. Eğer teklifi reddederse, bir sonraki günü beklerler ve 2. oyuncu bir telif yapar, $(x_2, y_2) \in D$. 2. oyuncunun teklifini gören 1. oyuncu, teklifi kabul eder ya da reddeder. Eğer 1. oyuncu teklifi kabul ederse, teklif hayata geçirilir ve kazançlar $(\delta x_2, \delta y_2)$ şeklinde olur. Eğer oyuncu teklifi reddederse, oyun biter ve TL'yi kaybederler ve herikisi de 0 alır.

Bu oyunu analiz edelim. İkinci gün, eğer 1. oyuncu teklifi reddederse, 0 alır. Dolayısıyla, 0'dan yüksek herhangi bir teklifi kabul edecektir ve 0 veren bir teklifi kabul etmek ve reddetmek arasında ise kayıtsızdır. Varsayalım ki, (0,1) teklifini kabul etsin.[2] O zaman, 2. oyuncu (0,1) teklif ederdi, ki bu 2. oyuncunun alabileceğinin en iyisidir. Dolayısıyla, eğer ilk gün bir anlaşmaya varamazlarsa, ikinci gün 2. oyuncu bir TL'nin hepsini alır ve 1. oyuncuya hiçbir şey bırakmaz. TL'yi bir sonraki gün almanın değeri 2. oyuncu için δ'dır. Dolayısıyla, ilk gün, 2. oyuncu kendisine δ'dan daha fazla veren tüm teklifleri kabul edecektir, δ'dan daha az veren tüm teklifleri reddedecektir ve δ veren teklifleri de kabul etmek ve reddetmek arasında kayıtsızdır. Yukarıdaki gibi, varsayalım ki, 2. oyuncu $(1-\delta, \delta)$ teklifini kabul etsin. Bu durumda, 1. oyuncu $(1-\delta, \delta)$ teklifinde bulunur ve bu teklif kabul edilir. 1. oyuncuya $1-\delta$'dan daha fazla veren her paylaşım, 2. oyuncuya δ'dan daha az verecektir ve reddedilecektir.

Şimdi, yukarıdaki oyunu n defa tekrarladığımızı düşünelim. Yani, eğer ikinci günün sonunda bir anlaşmaya varmadılarsa, üçüncü gün 1. oyuncu bir teklifte bulunur, $(x_3, y_3) \in D$. Bunu gören 2. oyuncu, kabul eder ya da etmez. Eğer kabul ederse, teklif hayata geçirilir, kazançlar $(\delta^2 x_3, \delta^2 y_3)$ şeklinde olur. Eğer reddederse, bir sonraki günü beklerler ve 2. oyuncu bir teklifte bulunur, $(x_4, y_4) \in D$. Şimdi, 2. oyuncunun ne teklif ettiğini gören 1. oyuncu kabul eder ya da etmez. Eğer 1. oyuncu kabul ederse, teklif hayata geçirilir ve kazançlar $(\delta^3 x_4, \delta^3 y_4)$ şeklinde olur. Eğer 1. oyuncu reddederse, 5. günü beklerler... Bu böyle $2n$'inci günün sonuna kadar devam eder. Hala anlaşmaya varamazlarsa, oyun biter, TL'yi kaybederler ve kazançlar $(0, 0)$ olur.

Alt-oyun mükemmel denge şöyledir. Herhangi bir $t = 2n - 2k$ gününde (k bir negatif olmayan tam sayıdır), 1. oyuncu

$$x \geq \frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}$$

[2]Aslında, dengede 1. oyuncu (0,1) teklifini kabul etmelidir. Eğer, (0,1)'i kabul etmezse, 2. oyuncunun en iyi tepkisi boş küme olacaktır, bu da bir denge ile tutarlı değildir. (2. oyuncunun herhangi bir $(\epsilon, 1-\epsilon)$ teklifi kabul edilecektir. Ancak herhangi bir $(\epsilon, 1-\epsilon)$ teklifi için kabul edilecek daha iyi bir teklif her zaman vardır, $(\epsilon/2, 1-\epsilon/2)$.)

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir (x, y) teklifini kabul eder ve

$$x < \frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir (x, y) teklifini ise reddeder; ve 2. oyuncu

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}, 1 - \frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}\right) \equiv \left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}, \frac{1+\delta^{2k+1}}{1+\delta}\right)$$

teklifinde bulunur.

Herhangi bir $t-1 = 2n-2k-1$ gününde ise, 2. oyuncu bir (x, y) teklifini kabul eder, ancak ve ancak,

$$y \geq \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}$$

ve 1. oyuncu

$$(x_{t-1}, y_{t-1}) = \left(1 - \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right) \equiv \left(\frac{1-\delta^{2k+2}}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right)$$

teklifinde bulunur.

Bunun denge olduğunu k üzerine matematiksel tümevarım yoluyla gösterebiliriz. (Yani, önce bunun $k = 0$ için doğru olduğunu göstereceğiz; sonra da $k-1$ için doğru olduğunu varsayıp, k için doğru olduğunu göstereceğiz.)

Ispat. $k = 0$ durumunda son iki periyot var sadece ve bu da yukarıda analizini yaptığımız 2-periyotluk oyuna denktir. $k = 0$ aldığımızda, burada betimlenen davranışın, 2-periyotluk oyundaki denge davranışıyla aynı olduğunu kolaylıkla gösterebliriz. Şimdi, bir $k-1$ için yukarda betimlenenin denge olduğunu varsayalım. Yani, $t+1 := 2n-2(k-1)-1 = 2n-2k+1$ gününün başında, 1. oyuncu

$$(x_{t+1}, y_{t+1}) = \left(\frac{1-\delta^{2(k-1)+2}}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2(k-1)+1}\right)}{1+\delta}\right) = \left(\frac{1-\delta^{2k}}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2k-1}\right)}{1+\delta}\right)$$

teklifini verir ve bu teklif kabul edilir. $t = 2n-2k$ gününde, 1. oyuncu bir teklifi kabul eder ancak ve ancak bu teklif bir sonraki gün en az $\frac{1-\delta^{2k}}{1+\delta}$ edinmek kadar iyi olmalıdır, bu da $\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}$ değerindedir. Dolayısıyla, 1. oyuncu bir (x, y) teklifini kabul edecektir, ancak ve ancak,

$$x \geq \frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}.$$

Bu durumda, 2. oyuncunun yapabileceği en iyi şey

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}, 1 - \frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}\right) = \left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}, \frac{1+\delta^{2k+1}}{1+\delta}\right)$$

teklifidir. 2. oyuncuya y_t'den daha fazla veren herhangi bir teklif reddedilecektir ve 2. oyuncu

$$\delta y_{t+1} = \frac{\delta^2\left(1+\delta^{2k-1}\right)}{1+\delta} < y_t$$

kazanacaktır. Yani, t gününde 2. oyuncu (x_t, y_t) teklifinde bulunur; bu teklif kabul edilir. Bu durumda, $t-1$ gününde, 2. oyuncu bir (x, y) teklifini kabul eder ancak ve ancak

$$y \geq \delta y_t = \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}.$$

Bu durumda, $t-1$ gününde, 1. oyuncu

$$(x_{t-1}, y_{t-1}) \equiv (1-\delta y_t, \delta y_t) = \left(\frac{1-\delta^{2k+2}}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right)$$

teklifinde bulunur, bu da ispatı sonlandırır. ■

Şimdi, $n \to \infty$ olsun. Herhangi bir tek t gününde, 1. oyuncu

$$(x_t^\infty, y_t^\infty) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-\delta^{2k+2}}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right) = \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$$

teklifinde bulunur ve herhangi bir çift t gününde 2. oyuncu

$$(x_t^\infty, y_t^\infty) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}, \frac{1+\delta^{2k+1}}{1+\delta}\right) = \left(\frac{\delta}{1+\delta}, \frac{1}{1+\delta}\right)$$

teklifinde bulunur ve bu teklifler ancak kabul edilirler.