14.12 Oyun Teorisi Ders Notları

Muhamet Yıldız

Ders 3-6

Bu derste, oyunları ve Nash dengesi gibi bazı çözüm yollarını tanımlayacağız ve bu çözüm yollarının arkasındaki varsayımları tartışacağız.

Bir oyunu analiz etmek için,

- oyuncuların kimler olduğunu,
- oyuncular için hangi eylemlerin mevcut olduğunu,
- her oyunucunun herbir sonuca ne kadar değer biçtiğini,
- herbir oyuncunun ne bildiğini,

bilmemiz gerekir.

Oyuncuların sadece dış parametreler, getiriler gibi mesela, hakkında ne bildiklerini belirtmemiz yetmez, aynı zamanda da diğer oyuncuların ne bildikleri ve bu parametreler hakkında neye inandıkları vs hakkında ne bildiklerini belirtmemiz gerekir. Bu dersin ilk kısmında, bir oyuncu tarafından bilinen herşeyin diğer tüm oyuncular tarafından da bilindiği, yani *ortak bilgi* olduğu, eksiksiz bilgi oyunlarına odaklanacağız.[1] (X'e ortak bilgi diyoruz, eğer herkes X'i biliyorsa ve herkes herkesin

[1] Bilgi, alttaki özellikleri sağlayan, önermeler üzerine bir işlem olarak tanımlıdır:

1. Eğer X'i biliyorsam, X doğru olmalı;
2. Eğer X'i biliyorsam, X'i bildiğimi biliyorum;
3. Eğer X'i bilmiyorsam, X'i bilmediğimi biliyorum;
4. Eğer birşey biliyorsam, bunun tüm çıkarımlarını biliyorum.

X'i bildiğini biliyorsa ve herkes X'i herkesin bildiğini bidiğini bilyorsa, ..sürgit.) Dersin ikinci yarısında ise, bilgi ile ilgili konulara odaklanıp, bu varsayımı kaldıracağız ve oyuncuların asimetrik bilgiye sahip olmalarına izin vereceğiz.

1 Oyunların Gösterimi

Oyunlar iki şekilde gösteriliebilirler:

1. Normal (stratejik) biçim,
2. Kapsamlı (extansif) biçim.ıı

1.1 Normal biçim

Tanım 1 *(Normal biçim) Bir n-oyunculu oyun* $G = (S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n)$ *şeklinde bir listedir, öyle ki, her* $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ *için,* S_i *oyuncu* i *için mevcut tüm stratejilerin kümesidir ve* $u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ *oyuncu* i*'nin von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyounudur.*

Bir oyuncunun edineceği fayda sadece kendi stratejisine değil, aynı zamanda diğer oyuncuların oynadıkları stratejilere de bağlıdır. Ayrıca, her oyuncu i kendi faydasını yani u_i'i maksimize etmek ister (öyle ki, beklenen değerler kendi inanışlarına göre hesaplanırlar); bir diğer deyişle, u_i bir von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonudur. Bir oyuncu rasyoneldır diyeceğiz, ancak ve ancak, (inanışları verili iken) oyuncu u_i'nin beklenen değerini maksimize etmeye çalışıyorsa.[2]

Ayrıca, oyuncuların $N = \{1, \ldots, n\}$ olduğunun, her oyuncu i için mevcut stratejilerin S_i olduğunun, ve her oyuncu i'nin u_i'nin beklenen değerini maksimize etmeye çalıştığının herkesçe bilindiğini varsayıyoruz.

Sadece iki oyuncu varken, (normal biçim) oyunu bir ikili matrisle gösterebiliriz:

1/2	sol	sağ
üst	0,2	1,1
alt	4,1	3,2

[2] Bilgiyi tanımlarken de, birşey biliyorsam, bunun tüm çıkarımlarını biliyorum varsayımını yaparak, çok güçlü bir 'rasyonellik' varsayımı yaptık.

Burada, 1. oyuncu üst ve alt stratejilerine sahiptir. 2. oyuncu ise sol ve sağ stratejilerine sahiptir. Her bir kutucuktaki ilk sayı 1. oyuncunun, ikinci sayı ise 2. oyuncunun kazancıdır (mesela, u_1 (üst,sol) $= 0$, u_2 (üst,sol) $= 2$.)

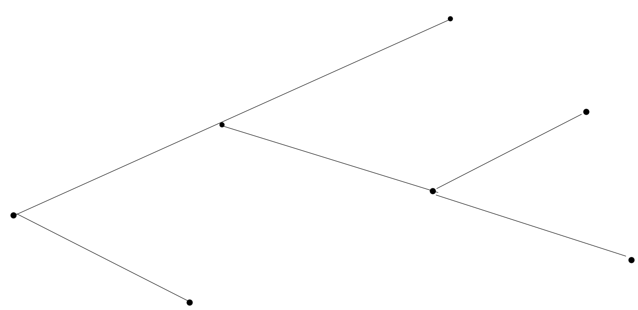
1.2 Kapsamlı biçim

Kapsamlı biçim, kimin ne zaman oynayacağını, her bir oyuncunun ne bildiğini, her bir oyuncuya hangi hamlelerin mevcut bulunduğunu ve her hamlenin oyunu nereye yönlendirdiğini tanımlayarak, vs., bir oyun hakkında tüm verileri içerir (ancak normal biçim daha çok bir özet gösterim şeklidir). Öncelikle, bazı tanımlar getiriyoruz.

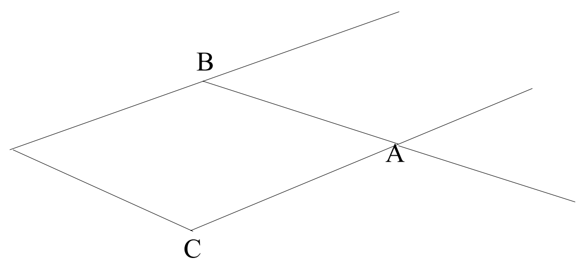
Tanım 2 *Bir* oyun ağacı *karar noktaları ve bu noktaları birleştiren yönlü kenarlar kümesidir, öyle ki,*

1. *bir ilk nokta vardır, bu noktaya gelen bir kenar yoktur;*
2. *diğer tüm noktalar için, tek bir gelen kenar vardır;*
3. *herhangi iki nokta için, bu iki noktayı birleştiren tek bir yol vardır.*

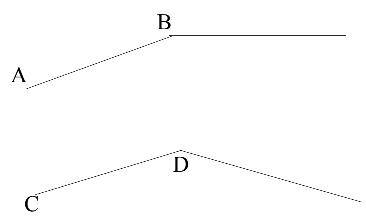
Bir ağacın gövdesinden uzanan dalları düşünün. Mesela,



bir oyun ağacıdır. Ama,



bir oyun ağacı değildir, çünkü A'ya ulaşmak için iki farklı yol vardır (B'den ve C'den).



bir oyun ağacı değildir, çünkü A ve B, C ve D'ye bağlı değildir.

Tanım 3 ***(Kapsamlı biçim)*** *Bir* oyun *bir oyuncular kümesini, bir oyun ağacını, ağacın her noktasının (son noktalar hariç) bir oyuncuya dağıtılımını bilgi yapısını ve tüm son noktalarda her oyuncunun kazancını içerir.*

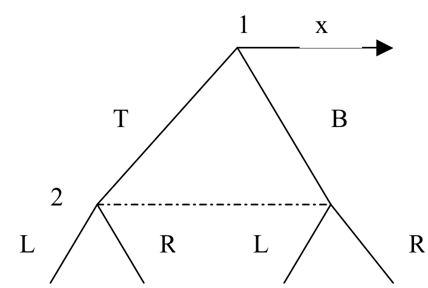
Oyuncular kümesi, oyunda rol alan ajanları içerir. Ancak, bir çok oyunda, şansın da payı vardır, tavlada zarların atılması veya pokerde kartların dağıtılması gibi. Daha genel anlamda, şans faktörünü bir belirsizlik olduğu durumlarda düşünmemiz gerekir. Bu olasılıkları temsil etmek için, kurgusal bir oyuncu dahil ediyoruz oyuna: Doğa. Doğa'nın son noktalarda herhangi bir kazancı yoktur ve ne zaman Doğa'ya bir nokta verilse, o noktayı takip eden dallar üzerine bir olasılık dağılımı verilmesi gerekir, 1/2 olasılıkla yazı ve 1/2 olasılıkla tura gibi.

Bir *bilgi kümesi*, $\{n_1, \ldots, n_k\}$ şeklinde bir noktalar kümesidir, öyle ki,

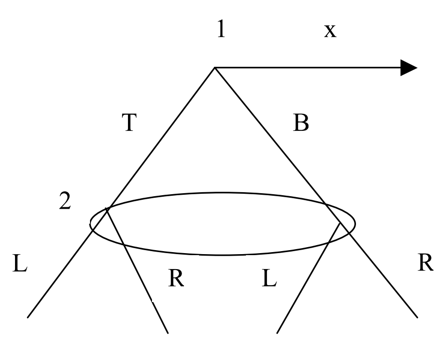
1. tüm bu noktalarda aynı oyuncu, i, oynar;

2. tüm bu noktalarda aynı hamleler mevcuttur.

Burada, bir bilgi kümesinde oynamak üzere sırası gelen oyuncu i'nin, bilgi kümesindeki noktaları birbirinden ayırt edemediği, ancak bu bilgi kümesi dışındaki noktaları içindekiler- den ayırt edebildiği varsayılır. Mesela, Şekil 1'deki oyunu düşünelim. Bu oyunda, 2. oyuncu 1. oyuncunun T ya da B oynadığını ama X oynamadığını bilmektedir. Ancak, 2. oyuncu 1. oyuncunun T mi yoksa B mi oynadığını kesin olarak bilememektedir. Aynı oyun Şekil 2'de biraz farklı bir biçimde gösterilmiştir.



Şekil 1



Şekil 2

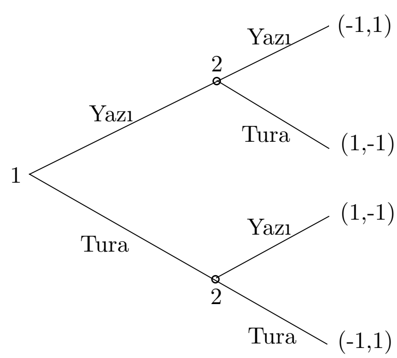
Bir *bilgi yapısı (information partition)* oyun ağacındaki her bir noktanın (ilk ve son noktalar hariç) bir bilgi kümesine dağılımıdır.

Özetlemek gerekirse: Herhangi bir noktada şunları biliyoruz: hangi oyuncunun oynayacağını, hangi eylemlerin mevcut bulunduğunu, oyuncunun o noktada ne bildiğini özetleyen hangi bilgi kümesinin noktayı kapsadığını. Tabi ki, iki nokta aynı bilgi kümesindeyse, mevcut eylemler her iki noktada da aynı olmalıdır, yoksa oyuncu bu iki noktayı birbirinden ayırabilirdi. Birkez daha, tüm bunlar herkesçe bilinmektedir. Mesela, Şekil 1'deki oyunda, 1. oyuncu biliyor ki, eğer 1. oyuncu X oynarsa, 2. oyuncu bunu öğrenecek, ama eğer T ya da B'yi seçerse, 2. oyuncu hangisinin seçildiğini bilemeyecek (ya T ya da B'nin seçildiğini bilecek).

Tanım 4 *Bir oyuncu için bir strateji, oynayacağı her bir bilgi kümesinde (bu stratejiye göre ulaşılmayacak bilgi kümelerinde dahi) hangi eylemi seçeceğini belirten bir eksiksiz (meydana gelebilecek koşullara bağlı) plandır.*

Bazı amaçlar için indirgenmiş stratejilere bakmak yeterli olacaktır. Bir indirgenmiş strateji, oyuncunun planı doğrultusunda ulaşımı engellenmeyen tüm bilgi kümelerinde hangi eylemde bulunacağını söyleyen, bir eksik koşullara-bağlı plandır. Ancak birçok diğer sebepten ötürü tüm stratejilere bakmamız gerekmektedir. Şimdi bazı örneklere bakalım.

Oyun 1: Kusursuz bilgili yazı-tura eşleştirme oyunu



Oyun ağacı 7 noktadan oluşmaktadır. İlki 1. oyuncuya, sonraki iki tanesi de 2. oyuncuya verilmiştir. 4 son noktada ise kazançlar belirtilmiştir. Sadece iki oyuncu olduğu için, kazanç vektörleri iki elemanlıdır. İlki 1. oyuncunun, ikincisi de 2. oyuncunun kazançlarıdır. Bu kazançlar von Neumann-Morgenstern faydalarıdır, öyle ki, bunlar üzerine beklentileri bulup, beklenen faydaları hesaplayabiliriz.

Bilgi yapısı oldukça basittir; tüm noktalar kendi bilgi kümelerine dahildirler. Başka bir deyişle, tüm bilgi kümeleri tek elemanlıdırlar. Bu, oyunda bir önceki hamlede (geçmiş) bir belirsizlik olmaması anlamına gelir. Bu noktada, hatırlayalım ki, oyun ağacındaki her bir noktaya tek bir yol ile ulaşilabilmektedir. Dolayısıyla, eğer tüm bilgi kümeleri tek elemanlıysa, oyuncular oyunun tüm geçmişini tam bir şekilde oluşturabilirler. Mesela, bu oyunda, 2. oyuncu 1. oyuncunun Yazı mı yoksa tura mı seçtiğini bilecektir. 1. oyuncu da yazı veya tura oynarken, 2. oyuncunun kendisinin (1. oyuncunun) ne oynadığını öğreneceğini bilecek. (Tüm bilgi kümelerinin tek elemanlı olduğu oyunlara *kusursuz bilgili oyunlar* denir.)

Bu oyunda, 1. oyuncu için strateji kümesi {Head, Tail}'dir. 2. oyuncu için bir strateji 1. oyuncunun ne yaptığına bağlı olarak ne yapması gerektiğini söylemelidir. Yani, 2. oyuncunun stratejileri şunlardır:

YY= eğer 1 Yazı oynarsa, Yazı, eğer 1 Tura oynarsa Yazı;

YT= eğer 1 Yazı oynarsa, Yazı, eğer 1 Tura oynarsa Tura;

TY= eğer 1 Yazı oynarsa, Tura, eğer 1 Tura oynarsa Yazı;

TT= eğer 1 Yazı oynarsa, Tura, eğer 1 Tura oynarsa Tura.

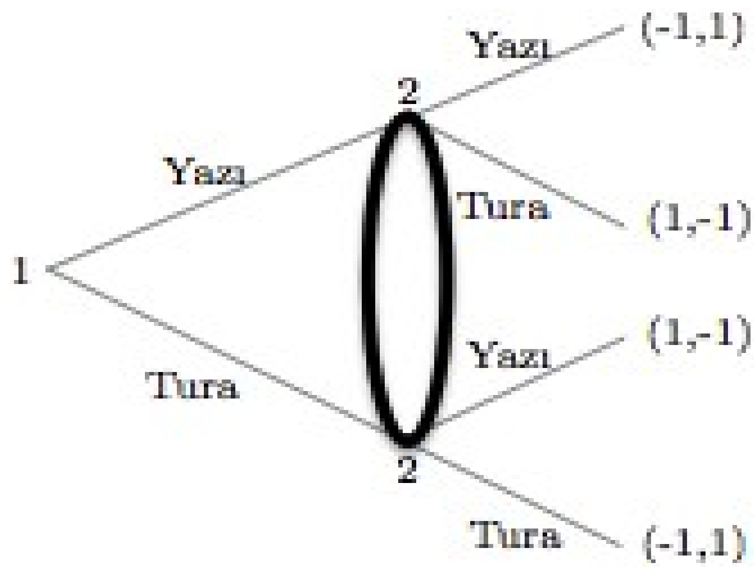
Herbir strateji ikilisinden doğacak kazançlar nelerdir? Eğer 1. oyuncu Yazı, 2. oyuncu da YY oynarsa, o zaman sonuç [1 Yazıyı seçer, 2 Yazıyı seçer] ve kazançlar da (-1,1) olur. Eğer 1 Yazı oynar ve 2 de YT oynarsa, sonuç aynı olur, dolayısıyla da kazançlar (-1,1) olur. Eğer 1 Tura oynar, 2 de YT oynarsa, o zaman sonuç [1 Turayı seçer ve 2 de Turayı seçer] ve tekrar kazançlar (-1,1) olur. Ancak, eğer 1 Tura oynar, 2 de YY oynarsa, o zaman sonuç [1 Turayı seçer ve 2 de Yazıyı seçer] olur, dolayısıyla da kazançlar (1,-1) olur. Diğer strateji ikilileri için de kazançları benzer şekilde hesaplayabiliriz.

Dolayısıyla, bu oyuna denk gelen normal veya stratjik biçim alttaki gibidir.

	YY	YT	TY	TT
Yazı	-1,1	-1,1	1,-1	1,-1
Tura	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1

Bilgi kümeleri çok önemlidirler! Bunu anlamak için, sıradaki oyunu düşünelim.

Oyun 2: Kusurlu bilgili yazı-tura eşleştirme oyunu



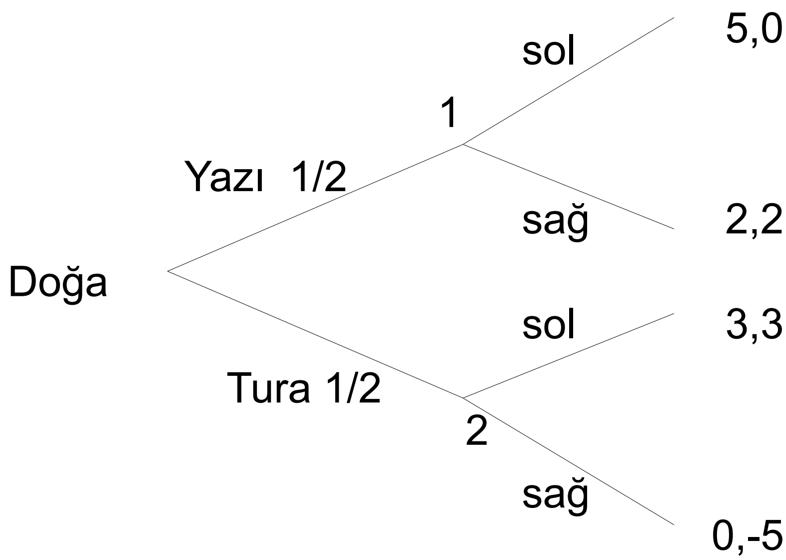
1. ve 2. oyun birbirine çok benzemekteler ancak aslen çok farklı iki oyunu temsil etmektedirler. 2. oyunda, 2. oyuncu sırası geldiğinde 1. oyuncunun ne seçtiğini bilmiyordur. Bu bir kusurlu bilgili bir oyundur (Yani, bazı bilgi kümeleri birden fazla nokta içermektedir.)

1. oyuncunun stratejileri aynıdır, Yazı ve Tura. Ancak 2. oyuncunun bu sefer sadece iki stratejisi vardır: Yazı ve Tura (1'in ne oynadığını bilmediğinden). Bu oyunun normal biçimi

1/2	Yazı	Tura
Yazı	-1,1	1,-1
Tura	1,-1	-1,1

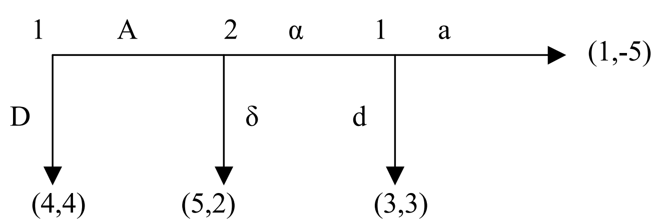
şeklindedir.

Oyun 3: Doğa'lı bir oyun:



Bu oyunda, hilesiz bir yazı-tura atıyoruz, öyle ki, yazı gelme olasılığı 1/2'dir. Eğer yazı gelirse, 1. oyuncu Sol ya da Sağ'dan birini seçer; eğer tura gelirse, 2. oyuncu Sol ya da Sağ'dan birini seçer.

Alıştırma 1 *Alttaki oyunun normal biçim gösterimi nedir? Başka bir kapsamlı biçimli oyun bulabilir misiniz ki aynı normal biçim gösterimine sahip olsun?*



[İpucu: Herbir kapsamlı biçimli oyun için, sadece tek bir tane normal biçim gösterimi vardır, ancak bir normal biçim oyununun tipik olarak birden fazla kapsamlı biçim gösterimi vardır.]

Birçok durumda, bir oyuncu diğer oyuncuların tam olarak hangi stratejileri oynadığını tahmin edemeyebilir. Bu tip durumları açıklayabilmek için karma stratejilerden bahsedeceğiz:

Tanım 5 *Bir oyunucu için* karma strateji *kendi stratejileri üzerine olan bir olasılık dağılımıdır.*

Eğer oyuncu i'nin stratejileri $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ik}\}$ ise, o zaman oyuncu i için bir karma strateji, σ_i, S_i üzerine bir fonksiyondur, öyle ki, $0 \leq \sigma_i(s_{ij}) \leq 1$ ve $\sigma_i(s_{i1}) + \sigma_i(s_{i2}) + \cdots + \sigma_i(s_{ik}) = 1$. Burada, σ_i diğer oyuncuların oyuncu i'nin hangi stratejiyi oynacağına dair inanışlarını temsil eder.

2 Nasıl oynamalı?

Şimdi normal biçimli oyunlarda kullanılan en yaygın "çözüm yol"larını acıklayacağız. İlk olarak oyuncuların rasyonel olmasına dayanan, "dominant strateji dengesi"ni betimleyeceğiz. Daha sonra da, rasyonelliğin ortak bilgi olmasına denk gelen "rasyonelleştirilebilirlik" konusunu tartışacağız ve son olarak ise oyuncuların diğer oyuncuların eylemleri hakkındaki önermelerinin karşılıklı bilgi olmasıyla ilişkili olan Nash dengesini tartışacağız.

2.1 Dominant-strateji (baskın-strateji) dengesi

i dışındaki tüm j oyuncuları tarafından oynanan s_j stratejilerini ifade etmek için s_{-i} notasyonunu kullanalım, yani;

$$s_{-i} = (s_1, ...s_{i-1}, s_{i+1}, ...s_n).$$

Tanım 6 *Bir s_i^* stratejisi s_i stratejisini* kesin domine eder (baskındır) *ancak ve ancak*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Yani, diğer oyuncular ne oynarlarsa oynasınlar, s_i^* oynamak i oyuncusu için s_i oynamaktan kesin daha iyidir. Bu durumda, eğer i akılıcı ise, asla kesin domine edilen s_i stratejisini oynamaz.[3]

Bir karma strateji σ_i, s_i stratejisini benzer bir şekilde domine eder: σ_i, s_i'yi kesin domine eder, ancak ve ancak,

$$\sigma_i(s_{i1})u_i(s_{i1}, s_{-i}) + \sigma_i(s_{i2})u_i(s_{i2}, s_{-i}) + \cdots \sigma_i(s_{ik})u_i(s_{ik}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Rasyonel bir i oyuncusu hiçbir zaman s_i oynamaz, ancak ve ancak s_i bir (saf veya karma) strateji tarafından domine ediliyorsa.

Benzer bir şekilde, zayıf dominantlığı da tanımlayabiliriz.

Tanım 7 *Bir s_i^* stratejisi s_i stratejisini* zayıf domine eder *ancak ve ancak*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

ve

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

bazı $s_{-i} \in S_{-i}$ için.

Yani, diğer oyuncular ne oynarlarsa oynasınlar, s_i^* oynamak en az s_i oynamak kadar iyi bir kazanç getirir ve bazı durumlar vardır ki, s_i^* oynamak s_i oynamaktan kesin daha iyi bir kazanç getirir. Eğer i rasyonel ise, ancak bu durumların ortaya asla çıkmayacağına inanıyorsa s_i oynar. Eğer ihtiyatlı davranırsa, yani, bu durumlara pozitif olasılık atıyorsa, o zaman s_i oynamaz.

Tanım 8 *Bir s_i^d stratejisi i oyuncusu için bir* (zayıf) dominant stratejidir *ancak ve ancak s_i^d i oyuncusunun diğer tüm stratejilerini (zayıf) domine ediyorsa. Bir s_i^d stratejisi i oyuncusu için bir* kesin dominant stratejidir *ancak ve ancak s_i^d, i oyuncusunun diğer tüm stratejilerini kesin domine ediyorsa.*

Eğer i rasyonel ise ve kesin dominant bir stratejisi, s_i^d, varsa, o zaman başka bir strateji oynamayacaktır. Eğer bir zayıf dominant stratejisi varsa ve ihtiyatlı ise, o zaman başka stratejileri oynamayacaktır.

[3] Yani, hiçbir inanış yoktur ki, bu oyuncu o inanışa göre s_i oynasın. Bunu ispatlayabilir misiniz?

Örnek:

1/2	çok çalış	çalışma
işe al	2,2	1,3
işe alma	0,0	0,0

Bu oyunda, 1. oyuncu (firma) kesin dominant bir stratejiye sahip, "işe al". 2. oyuncunun ise sadece bir zayıf domine edilen stratejisi var. Eğer oyuncular rasyonel iseler ve ek olarak 2. oyuncu da ihtiyatlı ise, o zaman 1. oyuncunun "işe al"acağını 2. oyuncunun da "çalışma"yacağını bekleriz. [4]

1/2	çok çalış	çalışma
işe al	2,2 $\Longrightarrow$	1,3
işe alma	0,0 $\Uparrow$	0,0 $\Uparrow$

Tanım 9 *Bir strateji vektörü,* $s^d = (s_1^d, s_2^d, ...s_N^d)$*, bir* dominant strateji dengesidir*, ancak ve ancak,* s_i^d *her* i *oyuncusu için bir dominant stratejidir.*

Örnek olarak Tutuklular ikilemini düşünelim.

1/2	itiraf et	itiraf etme
itiraf et	-5,-5	0,-6
itiraf etme	-6,0	-1,-1

"İtiraf et" her iki oyuncu için de bir kesin dominant stratejidir, dolayısıyla, (itiraf et, itiraf et) bir dominant strateji dengesidir.

1/2	itiraf et	itiraf etme
itiraf et	-5,-5	$\Longleftarrow$ 0,-6
itiraf etme	-6,0 $\Uparrow$	$\Longleftarrow$-1,-1 $\Uparrow$

[4]Bu olabilecek tek sonuç, eğer ki her iki oyuncu da rasyonel ve 2. oyuncu 1. oyuncunun rasyonel olduğunu biliyorsa.

Örnek: (ikinci-fiyat müzayedesi (ihalesi)) Bir müzayedede satılmak üzere bir objemiz var. İki alıcı var. Objenin alıcı i için değeri v_i'dir ve bu alıcı tarafından bilinmektedir. Herbir alıcı i, kapalı bir zarfta aynı anda bir b_i fiyat teklifinde bulunur. Daha sonra, bu zarflar açılır; ve en yüksek teklifi

$$b_{i^*} = \max\{b_1, b_2\}$$

veren oyuncu, objeyi alır ve ikinci en yüksek fiyatı (bu b_j dir, öyle ki, $j \neq i^*$) öder. (Eğer iki veya daha fazla oyuncu aynı en yüksek teklifi yaparlarsa, aralarından birini yazı-tura ile belirleriz.)

Formel olarak, oyun, oyuncular kümesi $N = \{1, 2\}$, stratejiler b_i ve kazançlar

$$u_i(b_1, b_2) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{eğer } b_i > b_j \\ (v_i - b_j)/2 & \text{eğer } b_i = b_j \\ 0 & \text{eğer } b_i < b_j \end{cases}$$

öyle ki, $i \neq j$, ile tanımlanır.

Bu oyunda, her i oyuncusu için objeye biçtiği kendi doğru değerini teklif olarak vermek bir dominant stratejidir. Bunu görmek için, kendi biçtiği değerden başka bir değeri teklif verme stratejisini, yani herhangi bir i için $b_i' \neq v_i$, düşünelim. Göstermek istiyoruz ki, b_i', v_i tarafından zayıf domine edilen bir stratejidir. $b_i' < v_i$ olduğu durumu düşünelim. Eğer diğer oyuncunun verdiği teklif $b_j < b_i'$ ise, oyuncu i her iki b_i' ve v_i stratejileri altında $v_i - b_j$ kazanır. Eğer diğer oyuncunun verdiği teklif $b_j \geq v_i$ ise, oyuncu i her iki b_i' ve v_i stratejileri altında 0 kazanır. Ancak eğer, $b_j = b_i'$, o zaman v_i teklifi $v_i - b_j > 0$ getirir, öte yandan, b_i' sadece $(v_i - b_j)/2$ kazandırır. Benzer şekilde, eğer $b_i' < b_j < v_i$ ise, v_i teklifi $v_i - b_j > 0$ kazandırırken, b_i' sadece 0 getirir. Dolayısıyla, v_i teklifi, b_i' teklifini domine eder. $b_i' > v_i$ olduğu durum da benzerdir, tek fark $b_i' > b_j > v_i$ olduğu durumdur ki, v_i teklifi 0 getirirken, b_i' negatif kazanç getirir, $v_i - b_j < 0$. Dolayısıyla, v_i teklifi her iki oyuncu i için de dominant stratejidir.

Alıştırma 2 *Bunu n-alıcılı duruma genelleyiniz.*

Var olduğu durumlarda, dominant strateji dengesinin çok açık bir çekiciliği vardır. Bu tip durumlarda, oyuncuların rasyonellikleri dominant strateji dengesinin oynanacağını söyler. Ancak, dominant strateji dengesi her zaman yoktur. Sıradaki oyun, *cinsiyetler savaşı*, çekingen bir ilk randevuyu temsil eder (tabi, bu ismi daha çok hakeden, hayvan davranışından esinlenen başka oyunlar da vardır). Hem erkek hem kadın tek başlarına olmaktansa beraber olmayı tercih ediyorlar. Ancak, çekingen olduklarından randevunun yerini kesinleştiremiyorlar. Herikisi de diğerini ya operada ya da balede bulmayı umuyor. Kadın baleyi, erkek ise operayı tercih ediyor.

Man/Woman	opera	bale
opera	3,1	0,0
bale	0,0	1,3

Açıktır ki, hiçbir oyuncunun dominant stratejisi yoktur.

Man/Woman	opera	bale
opera	3,1	$\Downarrow \Leftarrow$ 0,0
bale	0,0 $\Uparrow \Rightarrow$	1,3

2.2 Rasyonelleştirebilirlik veya Kesin domine edilen stratejileri yinelemeli eleme yolu

Şimdi alttaki geliştirilmiş Tutuklular ikilemini düşünelim.

1/2	itiraf et	itiraf etme	kaç
itiraf et	-5,-5	0,-6	-5,-10
itiraf etme	-6,0	-1,-1	0,-10
kaç	-10,-6	-10,0	-10,-10

Bu oyunda, hiçbir oyuncunun dominant stratejisi yok, ama domine edilen bir strateji var: "kaç" (hem 1. hem 2. oyuncu için) "itiraf et" tarafından kesin domine ediliyor. Şimdi 2. oyuncunun problemini düşünelim. 2. oyuncu biliyor ki, 1. oyuncu rasyonel, dolayısıyla 1. oyuncunun "kaç" stratejisini seçmeyeceğini öngörebilmektedir. Dolayısıyla, "kaç" stratejisini 1. oyuncunun seçeneklerinden eleyebilir ve daha küçük olan alttaki oyuna bakar

1/2	itiraf et	itiraf etme	run away
itiraf et	-5,-5	0,-6	-5,-10
itiraf etme	-6,0	-1,-1	0,-10

öyleki ”kaç” elenmiştir, çünkü kesin domine edilmekteydi; kolon oyuncusu satır oyuncusunun bunu hiçbir zaman seçmeyeceği sonucuna varmıştır.

Daha küçük olan bu oyunda, 2. oyuncunun bir dominant stratejisi vardır, ”itirat et”. Yani, eğer 2 rasyonelse ve 1'in rasyonel olduğunu biliyorsa, ”itiraf et” stratejisini oynayacaktır.

Orijinal oyunda ”itiraf etme”, ”kaç” stratejisine göre daha iyiydi, o yüzden de ”itiraf et” dominant strateji değildi. Ancak, 1. oyuncunun ”kaç” oynaması *rasyonelleştirilemez*, çünkü domine edilmiş bir stratejidir. Bu bizi Kesin Domine Edilen Stratejileri Yinelemeli Eleme Yolu'na götürür. ”Kesin domine edilen stratejileri yinelemeli elersek” ne olur? Başka bir deyişle, bir kesin domine edilen stratejiyi eleyip, indirgenen oyunda başka bir kesin domine edilen strateji arıyoruz. Daha başka bir kesin domine edilen strateji bulamadığımızda da duruyoruz. Açıktır ki, oyuncuların rasyonel oldukları ortak bilgi ise, oyuncular sadece kesin domine edilen stratejilerin yinelemeli eleme yolundan kurtulan stratejileri oynarlar. Bu yüzden, bu tür stratejilere *rasyonelleştirilebilir* stratejiler diyoruz. **Dikkat:** karma stratejiler tarafindan domine edilen stratejileri de eliyoruz!

Yukarıdaki örnekte, rasyonelleştirilebilir stratejiler yine (”itiraf et”,”itiraf et”)'dir.

Bu noktada durup bu yöntemi Cournot duopolisine uygulamalısınız!! (Bknz. Gibbons) Ayrıca, her elemede rasyonellik varsayımını üretebildiğinizden emin olun. Mesela, yukarıdaki oyunda, 2. oyuncu 1. oyuncunun rasyonel olduğunu ve ”kaç” oynamayacağını biliyor, ve kendisi de rasyonel olduğundan kendisi de sadece ”itiraf et” oynar, çünkü ”itiraf et” 2. oyuncu için, 1. oyuncunun ”kaç” oynama olasılığına 0 atayan herhangi bir inanışına göre, olabilecek en iyi tepkidir.

Sorun şudur ki, çok fazla rasyonelleştirilebilir strateji olabilir. Yazı-tura eşleştirme oyununu (Matching Pennies) düşünelim:

1/2	Yazı	Tura
Yazı	-1,1	1,-1
Tura	1,-1	-1,1

Burada, tüm stratejiler rasyonelleştirilebilir. Mesela, eğer 1. oyuncu 2'nin Yazı oynayacağına inanıyorsa, o zaman Tura oynar, eğer 2. oyuncu 1. oyuncunun Tura oynayacağına inanıyorsa, o zaman Tura oynar. Dolayısıyla, strateji ikilisi (Yazı, Tura) rasyonelleştirilebilir. Ancak belirtelim ki, 1 ve 2'nin inanışları birbirleriyle uyumlu değildirler.

Rasyonelleştirilebilir stratejiler kümesi genelde cok büyüktür. Öte yandan, dominant strateji dengesi ise çok kısıtlayıcı bir konsepttir: genellikle de oyunlarda bu denge yoktur.

Çok fazla rasyonelleştirilebilir stratejinin bulunmasının nedeni, oyuncuların sanılarının diğer oyuncuların aslında ne oynadıklarıyla "tutarlı" olmasını şart koşmamış olmamızdır. Mesela, rasyonelleştirilebilir strateji ikilisi olan (Yazı, Tura)'da, 2. oyuncu 1. oyuncunun Tura oynayacağını düşünerek Tura oynarken, 1. oyuncu ise aslında Yazı oynamaktadır. Oyuncuların sanılarının karşılıklı bilgi olduğunu varsayan, tutarlılık getiren, başka bir konsept ele alıyoruz – Nash Dengesi (bundan sonra, ND).

2.3 Nash Dengesi

Cinsiyetler savaşı oyununu düşünelim

Erkek/Kadın	opera	bale
opera	4,1	0,0
bale	0,0	1,4

Bu oyunda, dominant strateji yok. Ama farzedelim ki, Kadın operayı seçsin. O zaman, Erkek'in oynayacağı en iyi strateji de operadır. Dolayısıyla, Erkek için opera, operaya *en iyi tepkidir*. Benzer şekilde, opera Kadın için de operaya en iyi tepkidir. Dolayısıyla, (opera,opera)'da hiçbir oyuncu başka bir strateji seçmek istemez. Bu bir Nash dengesidir.

Formel olarak,

Tanım 10 *Herhangi bir i oyuncusu için, bir s_i^{BR} stratejisi, s_{-i}'ye bir* en iyi tepkidir*, ancak ve ancak*

$$u_i(s_i^{BR}, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i.$$

Bu tanım dominant strateji tanımına bir fark dışında denktir: bu tanım tüm $s_{-i} \in S_{-i}$ için değil, sadece spesifik bir s_{-i} içindir. Tüm s_{-i}'ler için doğru olsaydı, o zaman s_i^{BR} da dominant strateji olurdu, ki bu bir s_{-i} stratejisine en iyi tepki olma koşulundan daha güçlü bir koşuldur.

Tanım 11 *Bir strateji vektörü,* $(s_1^{NE}, ...s_N^{NE})$*, bir* Nash dengesidir*, ancak ve ancak, tüm i'ler için* s_i^{NE}*,* $s_{-i}^{NE} = (s_1^{NE}, ...s_{i-1}^{NE}, s_{i+1}^{NE}, ...s_N^{NE})$*'ye bir en iyi tepkidir. Başka bir deyişle,*

$$u_i(s_i^{NE}, s_{-i}^{NE}) \geq u_i(s_i, s_{-i}^{NE}), \forall s_i \in S_i.$$

Başka bir deyişle, hiçbir oyuncu, diğer oyuncuların hangi stratejileri oynayacaklarını bildiği durumdaki, başka bir stratejiye geçmek istemez.

Eğer bir strateji vektörü bir dominant strateji dengesi ise, o zaman aynı zamanda Nash dengesidir de, ancak tersi doğru değildir. Mesela, cinsiyetler savaşı oyununda, hem (O,O) hem (B,B) Nash dengeleridirler, ancak ikisi de dominant strateji dengesi değildirler. Ayrıca, bir dominant strateji dengesi tektir, ancak cinsiyetler savaşı oyunun da gösterdiği gibi, Nash dengesi genelde tek değildir.

Bu noktada durup, Cournot duopoli oyunundaki Nash dengesini hesaplamalısınız!! Nash dengesi neden rasyonelleştirilebilir stratejilerle örtüşüyor? Genel olarak: Tüm rasyonelleştirilebilir stratejiler Nash dengesi midir? Tüm Nash dengeleri rasyonelleştirilebilirler mi? Cournot oligopolündeki, Bertrand duopolindeki ve kamu problemindeki Nash dengelerini de hesaplamalısınız.

Yukardaki tanım sadece saf stratejileri kapsıyor. Karma stratejiler için Nash dengesini benzer bir şekilde, saf stratejileri karma stratejilerle değiştirerek tanımlayabiliriz. Tekrardan, diğer oyuncuların karma stratejileri verili iken, her oyuncu kendi beklenen kazancını kendi (karma) stratejileri üzerinden maksimize eder.[5]

Örnek — Cinsiyetler Savaşı Tekrardan, iki saf strateji dengesini bulduğumuz cinsiyetler savaşı oyununu düşünelim. Saf strateji dengelerine ek olarak, bir karma strateji dengesi var.

Erkek/Kadın	opera	bale
opera	4,1	0,0
bale	0,0	1,4

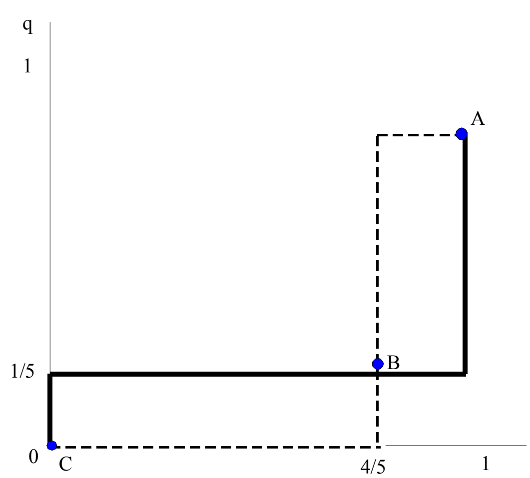
Erkeğin operaya gitme olasılığı q olsun, $1 - q$ olasılıkla da baleye gitsin. Eğer Kadının operaya gitme olasılığına p dersek, Kadının bundan edineceği beklenen faydayı şöyle hesaplayabiliriz

[5] Inanışlar açısından, bu şu koşula denk gelir: eğer i, j'nin bir s_j stratejisi oynaması olayına pozitif olasılık atarsa, o zaman s_j, j'nin inanışları verili iken bir en iyi tepki stratejisi olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
U_2(p;q) &= pqu_2(\text{opera,opera}) + p(1-q)\,u_2(\text{bale,opera}) \\
&\quad + (1-p)\,qu_2(\text{opera,bale}) + (1-p)(1-q)\,u_2(\text{bale,bale}) \\
&= p\left[qu_2(\text{opera,opera}) + (1-q)\,u_2(\text{bale,opera})\right] \\
&\quad + (1-p)\left[qu_2(\text{opera,bale}) + (1-q)\,u_2(\text{bale,bale})\right] \\
&= p\left[q4 + (1-q)\,0\right] + (1-p)\left[0q + 1\,(1-q)\right] \\
&= p[4q] + (1-p)\left[1-q\right].
\end{aligned}
$$

Farkediniz ki, p ile çarpılmış olan $[4q]$ terimi Kadının operaya gitmekten, $1-p$ ile çarpılmış olan terim de baleye gitmekten edineceği beklenen faydasıdır. $U_2(p;q)$ p argümanına göre, $4q > 1-q$ (yani, $q > 1/5$) ise kesin artan; $4q < 1-q$ ise kesin azalan ve $4q = 1-q$ ise de sabit bir fonksiyondur. Bu durumda, Kadının en iyi tepkisi $q > 1/5$ ise $p = 1$, $q < 1/5$ ise $p = 0$ ve $q = 1/5$ ise de p $[0,1]$ aralığında herhangi bir sayıdır. Başka bir deyişle, Kadın, operadan alacağı beklenen fayda daha yüksekse operayı, baleden alacağı beklenen fayda daha yüksekse baleyi seçer ve ikisi arasında kayıtsız ise de herhangi birini seçer.

Benzer şekilde, $p > 4/5$ ise en iyi tepki $q = 1$, $p < 4/5$ ise $q = 0$ ve $p = 4/5$ ise de herhangi bir q bir en iyi tepkidir. Alttaki grafikte en iyi tepkilerin çizilmiş halini görebilirsiniz.



Nash dengeleri, en iyi tepki fonksiyonlarının kesiştiği noktalardır. Bir tane her ikisinin de baleye gittikleri (0,0)'da; bir tane her ikisinin de operaya gittikleri (1,1)'de; bir tane de Kadının 4/5 olasılıkla operaya gittiği, Erkeğin de 1/5 olasılıkla operaya gittiği noktada dengeler var.

Karma strateji dengelerini (2X2 oyunlar için) nasıl hesapladığımıza dikkat edin. 1'in olasılıklarını öyle seçtik ki 2. oyuncu stratejileri arasında kayıtsız kaldı ve 2'nin olasılıklarını öyle seçtik ki 1. oyuncu stratejileri arasında kayıtsız kaldı.