14.12 Oyun Teorisi Ders Notları
Seçim Teorisi

Muhamet Yıldız

(Ders 2)

1 Temel Seçim Teorisi

X kümesi alternatifler kümesi olsun. Alternatifler birbirini dışlayan olsunlar, yani bir kişi aynı anda iki farklı alternatif seçemiyor olsun. Mümkün alternatiflerin kümesi de eksiksiz verilmiş olsun, ki oyuncunun seçimleri her zaman tanımlı olsun. Bunun modellemeye ilişkin olduğunu belirtelim. Mesela, Kahve ve Çay iki opsiyonumuz ise, alternatifleri K=Kahve ama Çay değil, Ç=Çay ama Kahve değil, KÇ=Kahve ve Çay, ve NN=Ne Kahve Ne Çay olarak tanmlıyoruz.

X kümesi üzerinde tanımlı bir $\succeq$ ilişkisini (matematiksel bağıntı) alalım. X kümesi üzerinde tanımlı bir ilişki $X \times X$ kümesinin bir alt kümesidir. $\succeq$ ilişkisine *tam (complete)* denir, ancak ve ancak, herhangi $x, y \in X$ için, ya $x \succeq y$ ya da $y \succeq x$ geçerlidir. $\succeq$ ilişkisine *geçişken (transitif)* denir, ancak ve ancak, herhangi $x, y, z \in X$ için,

$$[x \succeq y \text{ ve } y \succeq z] \Rightarrow x \succeq z.$$

Bir ilişki tercih ilişkisidir, ancak ve ancak, tam ve geçişken ise. Verili herhangi bir tercih ilişkisi $\succeq$ için, kesin (strict) ilişki $\succ$ alttaki gibi tanımlayabiliriz

$$x \succ y \iff [x \succeq y \text{ ve } y \not\succeq x],$$

ve kayıtsızlık ilişkisini de

$$x \sim y \iff [x \succeq y \text{ ve } y \succeq x].$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Aşağıdaki ifade sağlanıyorsa, bir tercih ili?kisi $u : X \to \mathbb{R}$ şeklindeki bir fayda fonksiyonu ile temsil edilebilir denir.

$$x \succeq y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Takip eden teorem bir ilişkinin bir fayda fonksiyonu tarafından temsil edilebilmesi için bir tercih ilişkisi olması gerektiğini söyler.

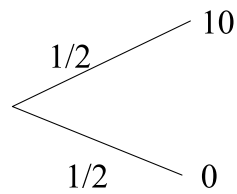
Teorem 1 *X sonlu olsun. Bir ilişki bir fayda fonksiyonu tarafından temsil edilebilir, ancak ve ancak, ilişki tam ve geçişken ise. Ayrıca, eğer $u : X \to \mathbb{R}$, $\succeq$ ilişkisini temsil ediyorsa ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir kesin artan fonksiyon ise, o zaman $f \circ u$ da $\succeq$ ilişkisini temsil eder.*

Bu son önerme ile bu tip fayda fonksiyonlarına ordinal (yani faydanın karşılaştırmalı olarak ölçülebilirliği) diyoruz.

Bu ordinal seçim teorisini kullanabilmemiz için, ajanın alternatifler üzerine olan tercihlerini bilmemiz gerekiyor. Bir önceki derste gördüğümüz üzere, oyun teorisinde, bir oyuncu stratejileri arasında seçim yapar, ve kendi srtarejileri üzerinde olan tercihleri diğer oyuncuların hangi stratejileri oynadıklarına bağlıdır. Tipik olarak, bir oyuncu diğer oyuncuların hangi stratejileri oynadıklarını bilmez. Dolayısıyla, ihtiyacımız olan bir belirsizlik altında karar-verme teorisidir.

2 Belirsizlik altında karar-verme

Sonlu bir ödüller kümesi Z düşünelim. P, Z üzerindeki $p : Z \to [0, 1]$ şeklindeki tüm olasılık dağılımları kümesi olsun, öyleki $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$. Bu olasılılık dağılımlarına piyango diyelim. Bir piyango bir ağaç grafiği ile gösterilebilir. Mesela, Şekil 1'de, Piyango 1 oyuncunun 1/2 olasılıkla 10TL alacağı (yani, bir yazı-turanın Yazı gelmesi durumu) ve 1/2 olasılıkla da 0TL alacağı (yani, yazı-turanın Tura gelmesi durumu) bir durumu göstermektedir.



Piyango1

Şekil 1

Bu anlattığımız durumdan farklı olarak, oyun teorisinde ve daha genel olarak ajanlar belirsizlik altında kararlarını verirken, kumarhanelerdeki gibi olasılıkların makinelerce belirlendiği piyangolar yok. Ancak, Savage(1954) tarafından gösterilmiştir ki, bazı koşullar altında, bir oyuncunun inanışları bir (tek) olasılık dağılımı ile temsil edilebilir. Bu olasılıkları kullanarak, eylemlerimizi de piyangolar ile temsil edebiliriz.

Öyle bir teoriye ihtiyacımız var ki, bir oyuncunun piyangolar üzerine olan tercihlerini ödüller üzerine olan tercihlerinden oluşturulsun. Bunu sağlayan birçok teori vardır. En ünlüsü - aynı zamanda en kanonik ve en faydalı olanı- Von Neumann-Morgenstern tarafından bulunmuş olan fayda beklenti maksimizasyonu teorisidir. P üzerine tanımlı bir tercih ilişkisi $\succeq$ bir von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonu $u : Z \to \mathbb{R}$ ile temsil edilir, ancak ve ancak,

$$p \succeq q \iff U(p) \equiv \sum_{z \in Z} u(z)p(z) \geq \sum_{z \in Z} u(z)q(z) \equiv U(q) \tag{1}$$

her bir $p, q \in P$ için. Belirtelim ki, $U : P \to \mathbb{R}$, $\succeq$'i ordinal anlamda temsil etmektedir. Yani, ajan, u'nun beklenen değerini maksimize etmek istermiş gibi davranır. Mesela, Piyango 1'in beklenen faydası $E(u(\text{Lottery } 1)) = \frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(0)$ idir. [1]

(1) deki temsilin gerekli ve yeterli koşulları altta verilmiştir:

Aksiyom 1 $\succeq$ *tam ve geçişkendir.*

[1] Z, $\mathbb{R}$ gibi sürekli olsaydı p'nin beklenen faydasını $\int u(z)p(z)dz$ ile hesaplardık.

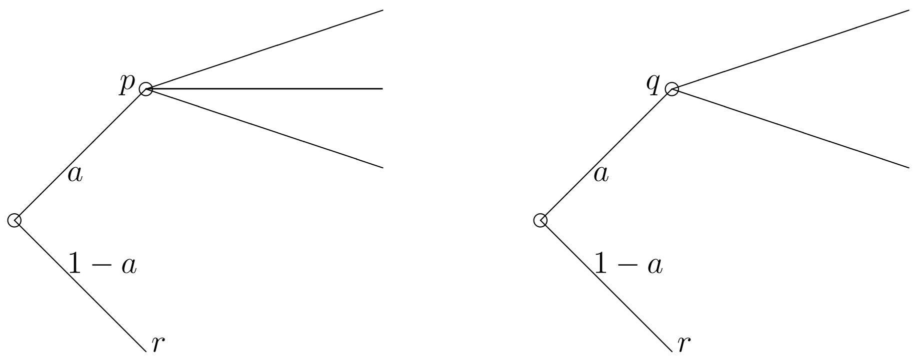
Bu, U'nun $\succeq$'i ordinal anlamda temsil etmesi için Teorem 1'den dolayı gereklidir. İkinci koşul *bağımsızlık (independence)* adını alır ve şu anlama gelir: bir oyuncunun iki piyango, p ve q, arasındaki tercihi, bir yazı-tura atıp "yazı" gelirse kendisine sabit bir r piyangosu versek de değişmez.

Aksiyom 2 *Herhangi $p, q, r \in P$ için ve herhangi $a \in (0, 1]$ için,* $ap + (1 - a)r \succ aq + (1 - a)r \iff p \succ q$.

p ve q piyangoları Şekil 2'deki gibi olsun. O zaman $ap+(1-a)r$ ve $aq+(1-a)r$ piyangoları, sabit bir r piyangosu ile p ve q piyangoları arasında bir yazı-tura attığımız Şekil 3'teki gibi gösterilebilir. Aksiyom 2 ajan'ın yazı-turadan sonra fikrini değiştirmeyeceğini söyler. Dolayısıyla, bu aksiyom bir "dinamik turarlılık" (dynamic consistency) aksiyomu olarak düşünülebilir.

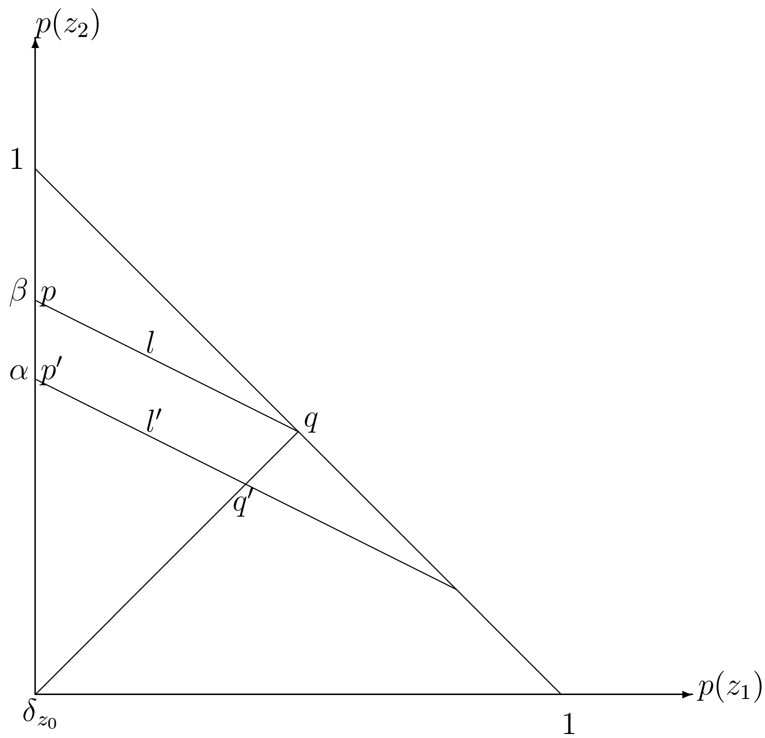
Üçüncü koşul tamamen tekniktir ve süreklilik aksiyomu adını alır. Bu aksiyom der ki, 'sonsuz iyi' veya 'sonsuz kötü' hiçbir ödül yoktur.

Şekil 2 : İki piyango



$ap + (1-a)r$ $\qquad$ $aq + (1-a)r$

Şekil 3 : İki bileşik piyango



Şekil 4 : piyangolar uzayında kayıtsızlık eğrileri

Aksiyom 3 *Herhangi $p, q, r \in P$ için, eğer $p \succ r$ ise, öyle iki $a, b \in (0,1)$ vardır ki, $ap + (1-a)r \succ q \succ bp + (1-r)r$ sağlanır.*

Aksiyom 2 ve Aksiyom 3 gerektirir ki, herhangi verili $p, q, r \in P$ ve herhangi $a \in (0,1)$ için,

$$\text{eğer } p \sim q \text{ ise, } ap + (1-a)\,r \sim aq + (1-a)r \text{ 'dir.} \tag{2}$$

Burdan iki çıkarım yapabiliriz:

1. Piyangolar üzerine olan kayıtsızlık eğrileri düz çizgilerdir.
2. Düz çizgi olan kayıtsızlık eğrileri birbirlerine paraleldirler.

Bu sonuçları açıklamak için, üç ödül düşünelim, z_0, z_1 ve z_2, öyle ki $z_2 \succ z_1 \succ z_0$ olsun. Bir p piyangosu, bir düzlemde $p(z_1)$'yi birinci kordinat (yatay aksta) ve $p(z_2)$'yi de ikinci kordinat (düşey aksta) alarak gösterilebilir. $p(z_0)$, $1-p(z_1)-p(z_2)$ idir. [Şekil 4'e bakınız.] Verili iki p ve q piyangoları için, $a \in [0,1]$ olduğu $ap + (1-a)q$ konveks kombinasyonları p ve q'yu birbirine bağlayan doğru parçalarıdır. Şimdi, $r = q$ alarak, (2)'den çıkarabiliriz ki, eğer $p \sim q$ ise, o zaman $ap + (1-a)q \sim aq + (1-a)q = q$ herbir $a \in [0,1]$ için. Yani, p ve q'yu birbirine bağlayan doğru parçası bir kayıtsızlık eğrisidir. Ayrıca, eğer l ve l' doğruları paralelseler, o zaman $\alpha/\beta = |q'| / |q|$, öyle ki, $|q|$ ve $|q'|$, sırasıyla, q ve q''ın orijine olan uzaklıklarıdır. Dolayısıyla, $a = \alpha/\beta$ alarak, $p' = ap + (1-a)\delta_{z_0}$ ve $q' = aq + (1-a)\delta_{z_0}$ olduğunu hesaplarız, öyle ki, δ_{z_0} orijindeki piyangodur ve 1 olasılıkla z_0 verir. Dolayısıyla, (2)'ye dayanarak diyebiliriz ki, eğer l bir kayıtsızlık eğrisiyse, l' da bir kayıtsızlık eğrisidir, bu da kayıtsızlık eğrilerinin paralel olduklarını gösterir.

l doğrusu $u_1 p(z_1) + u_2 p(z_2) = c$ denklemiyle tanımlanabilir, bazı $u_1, u_2, c \in \mathbb{R}$ için. l ve l' paralel olduğu için, l' de $u_1 p(z_1) + u_2 p(z_2) = c'$ denklemiyle tanımlanabilir, bazı c' için. Kayıtsızlık eğrileri $u_1 p(z_1) + u_2 p(z_2) = c$ eşitliği ile c'nin çeşitli değerleri için tanımlandığından, tercihler de

$$\begin{aligned} U(p) &= 0 + u_1 p(z_1) + u_2 p(z_2) \\ &\equiv u(z_0)p(z_0) + u(z_1)p(z_1) + u(z_2)p(z_2), \end{aligned}$$

ile temsil edilirler, öyle ki,

$$\begin{aligned} u(z_0) &= 0, \\ u(z_1) &= u_1, \\ u(z_2) &= u_2. \end{aligned}$$

Bu genel olarak doğrudur ve alttaki teoremde belirtilmiştir:

Teorem 2 *P üzerine bir ilişki, $\succeq$, $u : Z \to R$ şeklinde bir von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonu ile (1)'deki gibi temsil edilebilir, ancak ve ancak, $\succeq$ Aksiyom 1, Aksiyom 2 ve Aksiyom 3'ü sağlıyorsa. Ayrıca, u ve $\tilde{u}$ aynı tercih ilişkisini temsil ederler, ancak ve ancak, bazı $a > 0$ ve $b \in \mathbb{R}$ için $\tilde{u} = au + b$'dir.*

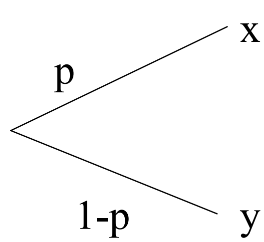
Teoremimizdeki son önermeden dolayı, bu gösterim doğrusal transformasyonlar hariç tektir. Yani, bir ajanın von Neumann-Morgenstern (VNM) fayda fonksiyonunu pozitif bir sayıyla çarparak ya da bir sabit sayı ekleyerek değiştirdiğimizde, tercihleri değişmez, ama fayda fonksiyonunu lineer olmayan bir transformasyondan geçirdiğimizde değişir. Bu anlamda, bu gösterim 'kardinal'dir. Hatırlayınız ki, ordinal gösterimlerde, tercihler, transformasyon lineer olmasa da, artan olması durumunda, değişmiyordu. Mesela, belirsizlik yokken, $v = \sqrt{u}$ ve u aynı tercihleri temsil ederler, ama (belirsizlik varken) VNM fayda fonksiyonu $v = \sqrt{u}$ piyangolar üzerine tanımlı çok farklı bir tercihler kümesini temsil eder. Bunun sebebi, kardinal gösterimde, ajanın risk'e karşı tutumunun ölçen, fonksiyonun eğriliği önemlidir.

3 Riske karşı tutumlar

Diyelim ki, A bireyi u_A fayda fonksiyonuna sahip olsun. Bu bireyin riski sevip sevmediğini nasıl anlarız?

Yanıt u_A fonksiyonunun kardinalitesinde yatar.

Öncelikle beklenen değeri 0 olan bir piyangoyu *adil* kumar olarak tanımlayalım. Mesela, alttaki piyango 2 bir adil kumardır, ancak ve ancak, $px + (1-p)y = 0$.



Bir ajanı *risk-kayıtsız* ya da *risk-nötr* olarak tanımlayalım, ancak ve ancak, ajan tüm adil kumarları kabul edip etmemek arasında kayıtsızsa. Dolayısıyla, u fayda fonksiyonuna sahip bir ajan *risk-nötrdür*, ancak ve ancak,

$$E(u(\text{piyango 2})) = pu(x) + (1-p)u(y) = u(0)$$

tüm p, x ve y'ler için.

Bu tüm p, x ve y'ler için doğrudur, ancak ve ancak, ajan beklenen değeri, yani $u(x) = ax + b$'i, maksimize eder. Dolayısıyla, fayda fonksiyonu lineer olmalıdır.

Dolayısıyla, bir ajan risk-nötrdür, ancak ve ancak, VNM fayda fonksiyonu vardır.

Bir ajan *kesin risk-sevmeyen* ya da *kesin riskten-kaçınandır*, ancak ve ancak, ajan tüm adil kumarları reddeder:

$$E(u(\text{piyango } 2)) < u(0)$$
$$pu(x) + (1-p)u(y) < u(px + (1-p)y) \equiv u(0)$$

Şimdi hatırlayalım ki, bir $g(\cdot)$ fonksiyonu kesin dışbükeydir, ancak ve ancak,

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

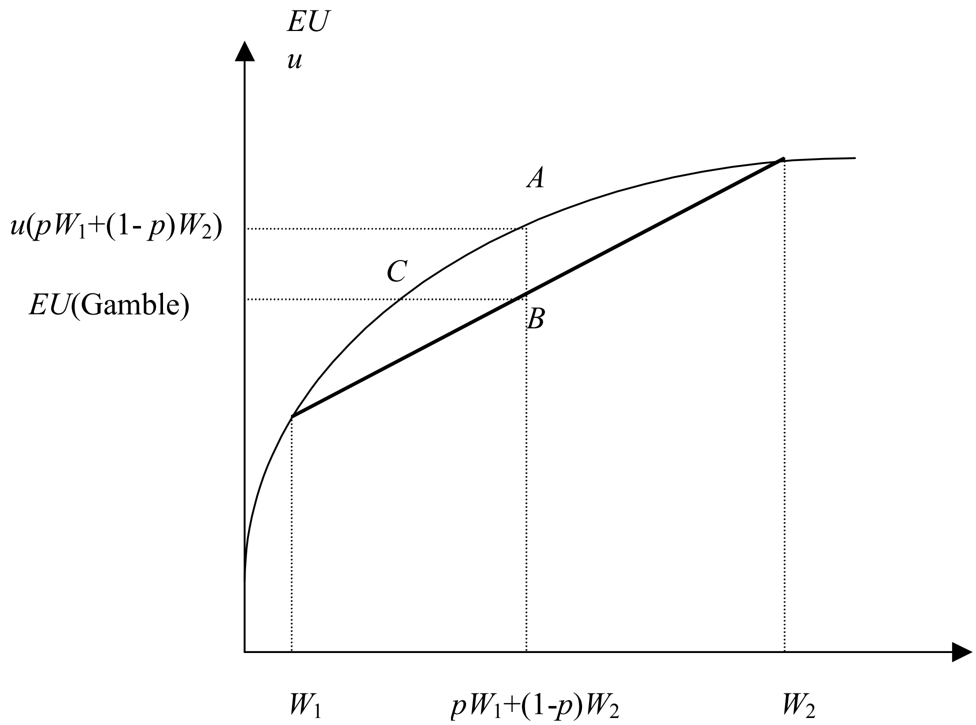
tüm $\lambda \in (0, 1)$ için. Dolayısıyla, kesin riskten-kaçınmak kesin dışbükey bir fayda fonksiyonuna sahip olmaya denktir. Bir ajana riskten-kaçınan diyelim ancak ve ancak ajanın *dışbükey* bir fayda fonksiyonu varsa, yani, $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$ herbir x, y ve λ için.

Benzer biçimde, bir ajan (kesin) risk-sevendir, ancak ve ancak, ajanın (kesin) içbükey bir fayda fonksiyonu vardır.

Şekil 5'e bakalım. AB, risk-sevmeyen bir ajanın, p olasılıkla W_1 ve $1-p$ olasılıkla da W_2 veren bir kumarı kabul ettiğinde kaybedeceği miktarı gösterir. BC ise bu kumarı oynamamak için ödemeye razı olduğu miktardır. Farz edelim ki, W_2 ajanın varığı, $W_2 - W_1$'da evinin değeri ve p de evin yanma olasılığı olsun. Dolayısıyla, yangın sigortası yokken, bu bireyin fayda fonksiyonu $EU(\text{kumar})$ olacaktır, ve bu beklenen değerin faydasından daha küçüktür.

3.1 Risk paylaşımı

Bir ajan düşünelim, fayda fonksiyonu $u : x \mapsto \sqrt{x}$ olsun. Bu ajanın, 1/2 olasılıkla 100TL getiren ve 1/2 olasılıkla da 0TL getiren bir (riskli) varlığı olsun. Bu varlığın beklenen faydası $EU_0 = \frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$'tir. Şimdi farz edelim ki, bir başka ajan da aynı fayda fonksiyonuna ve aynı (riskli) varlığa sahip olsun. Varsayalım ki, bir varlığın getirisi diğer varlığın ne getirdiğinden istatiksel olarak bağımsız olsun. Farz edelim ki, bu iki ajan varlıklarını bir havuzda toplayarak ortak bir fon oluştursunlar. Bu ortak fon 1/4 olasılıkla 200TL (her iki varlığın da yüksek getiride bulunduğu durum), 1/2 olasılıkla 100TL (sadece bir varlığın yüksek getiride bulunduğu durum) ve 1/4 olasılıkla 0TL (her iki varlığın da düşük getiride bulunduğu durum) getirir. Dolayısıyla, her bir ajanın ortak fondaki payı 1/4 olasılıkla 100TL, 1/2 olasılıkla 50TL ve 1/4 olasılıkla 0TL'dir. Dolayısıyla, ortak fondan kendi payının beklenen faydası $EU_S = \frac{1}{4}\sqrt{100} + \frac{1}{2}\sqrt{50} + \frac{1}{4}\sqrt{0} = 6.0355$'tir. Bu değer, açıktır ki, kendi varlığından edindiği beklenen faydadan daha fazladır. Dolayısıyla, ajanlar varlıklarındaki riski paylaşmaktan kazançlı çıkarlar.



Şekil 5

3.2 Sigorta

Farz edelim ki, yukarıda bahsettiğimiz ajana ($u : x \mapsto \sqrt{x}$ fayda fonksiyonuna ve 1/2 olasılıkla 100TL getiren ve 1/2 olasılıkla da 0TL getiren riskli varlığa sahip olan ajan) ek olarak risk-nötr bir ajan olsun ve bu ajanın çok fazla parası olsun. Bu yeni ajana sigorta şirketi diyelim. Sigorta şirketi ajanın varlığını, varlık 0TL verdiği durumda ajana 100TL vererek, sigortalasın. Ajan, bu sigortayı almak için ne kadarlık bir prim, P, vermeye razı olur? [Prim, sigorta şirketine ödenen sonuçtan bağımsız bir miktardır.]

Eğer risk-sevmeyen ajan P primini ödeyip sigortayı alırsa, varlığı kesin $100 - P$ olacakır. Eğer sigortayı satın almazsa, o zaman varlığı 1/2 olasılıkla 100TL, 1/2 olasılıkla da 0TL olacaktır. Dolayısıyla, sigortayı almak için P kadar bir miktarı ödemeyi tercih edecektir, ancak ve ancak,

$$u\,(100 - P) \geq \frac{1}{2}u\,(0) + \frac{1}{2}u\,(100)$$

yani, ancak ve ancak,

$$\sqrt{100 - P} \geq \frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\sqrt{100}$$

ancak ve ancak,

$$P \leq 100 - 25 = 75.$$

Öte yandan, eğer sigorta şirketi sigortayı P primine satarsa, kesin P kazanacak ve 1/2 olasılıkla da 100TL ödeyecek. Dolayısıyla, sigorta şirketi sigortayı satmaya razı gelir, ancak ve ancak,

$$P \geq \frac{1}{2}100 = 50.$$

Dolayısıyla, eğer sigorta şirketi ajanın varlığını $P \in (50, 75)$ kadarlık bir prime sigortalarsa, bunu her iki taraf da kabul etmek isteyecektir ve her ikisi de kazançlı çıkacaktır.

Alıştırma 1 *Şimdi, yukarıdaki ajanın aynısından iki risk-sevmeyen ajan ve bir sigorta şirketi olduğu durumu düşünelim. Sigorta şirketi her iki ajana da aynı P primini sigorta fiyatı olarak versin ve risk-sevmeyen ajanlar da ortak bir fon oluşturma seçeneğine sahip olsunlar. Herkes tarafından kabul edilecek prim aralığı nedir?*