14.12 Oyun Teorisi Ders Notları

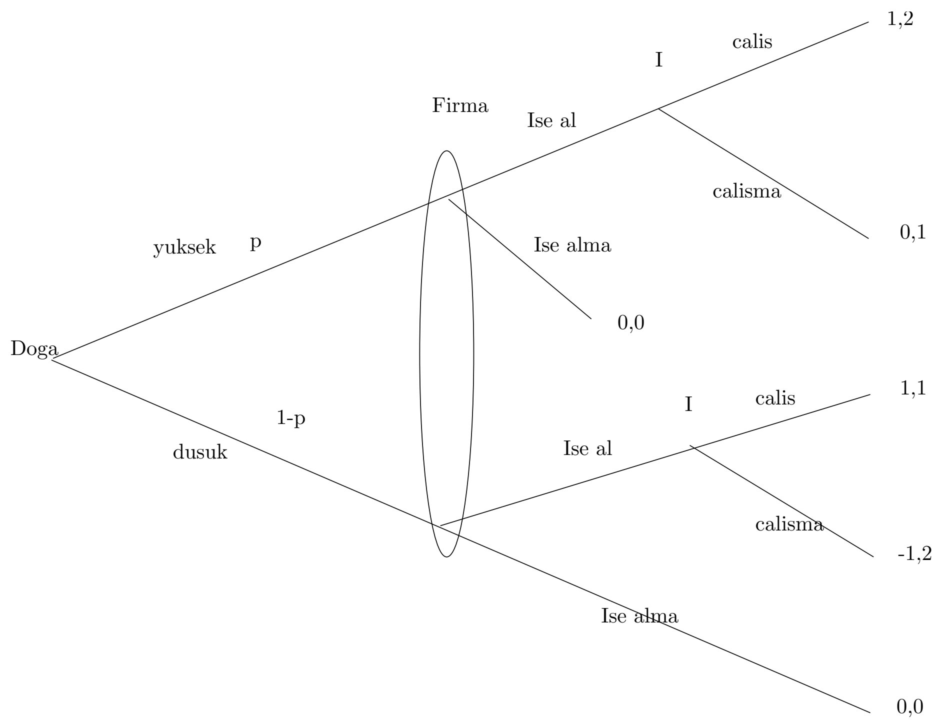
Muhamet Yıldız

Ders 15-18

1 Eksik Bilgili Statik Oyunlar

Şu ana kadar, herhangi bir oyuncu tarafından bilinen herhangi bir bilgi parçasının tüm oyuncular tarafından bilindiği (ve aslında ortak bilgi olduğu) oyunlara odaklandık. Bu tip oyunlara tam bilgili oyunlar denir. Böyle oyunlarda bilgi temelli kaygılar rol oynamaz. Gerçek hayatta, oyuncular her zaman, diğer oyuncular tarafından bilinmeyen bir miktar özel bilgiye sahiptirler. Mesela, diğer oyuncuların tercihlerini ve inanışlarını kendilerinin bildikleri kadar iyi bilmemiz neredeyse mümkün değildir. Bilgi temelli kaygılar, bu tip stratejik durumlarda oyuncuların karar verme sürecinde merkezi bir rol oynar. Dersin geri kalan kısmında, bu tip bilgi temelli konulara odaklanacağız. Öyle durumlara bakacağız ki, bir oyuncunun sahip olduğu bir bilgi başka oyuncularca bilinmeyecektir. Bu tip oyunlara tam olmayan bilgili oyunlar ya da asimetrik bilgili oyunlar denir. Bilgi asimetrileri Doğa'nın eylemleriyle modellenmiştir. Doğa'nın bazı eylemlerini kimi oyuncular ayırt edebilirlerken bazı oyuncular ayırt edemezler. Bir firmanın bir işçiyi işe alıp alma kararı verdiği ama işçinin ne kadar yetenekli olduğu bilgisine sahip olmadığı sıradaki basit örneği düşünelim.

Örnek 1 *Şekil 1'deki oyunu düşünelim. Bir firma ile bir işçi var. İşçi Yüksek kabiliyetli olabilir, ki bu durumda Çalışmak ister ve işe alınır, ya da Düşük kabiliyetli olabilir, ki bu durumda Kaytarmak ister. Firma çalışacak olan işçiyi işe almak ister, kaytaracak olan işçiyi ise işe almak istemez. İşci kabiliyet seviyesini bilmektedir. Firma, işçinin kabiliyet seviyesinin yüksek mi düşük mü olduğunu bilmemektedir. Firma, işçinin* p *olasılıkla yüksek kabilyette olduğuna,* $1-p$ *olasılıkla da düşük kabiliyette olduğuna inanmaktadır. En önemlisi, firma işçinin kendi kabiliyet seviyesinin bildiğini bilmektedir. Bu durumu modellemek icin, Doğa'ya Yüksek ve Düşük arasında bir seçim yaptırıyoruz, sırasıyla* p *ve* $1-p$ *olasılıklarıyla. Sonra, işçi Doğa'nın seçimini görmesine izin veriyoruz, ama firmanın görmesine izin vermiyoruz.*



Bir oyuncunun özel bilgisine, o oyuncunun "tip"i deniyor. Mesela, yukarıdaki örnekte, işçinin iki tipi var: Yüksek ve Düşük. Firmanın özel bilgisi olmadığından, firmanın tek bir tipi vardır. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, eksik bilgili oyunlar, Doğa'nın her bir oyuncunun tipini seçtiği ve oyuncuları özel olarak bilgilendirdiği kusursuz olmayan bilgili oyunlarla modellenmiştir. Bu tip oyunlar *eksik bilgili oyunlar* ya da *Bayesyen oyunlar* olarak adlandırılırlar.

Formel olarak, eksik bilgili statik bir oyun şöyledir. İlk olarak, Doğa bir $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T$ seçer, öyle ki, her $t \in T$ $p(t)$ olasılığıyla seçilir. Burada, $t_i \in T_i$ oyuncu i'nin, $i \in N = 1, 2, ..., n$, tipidir. Sonra, her oyuncu kendi tipini öğrenir, ama diğer oyuncuların tiplerini öğrenmez. Son olarak, oyuncular, sadece kendi tiplerini bilerek, eylemlerini eşzamanlı olarak seçerler. Tüm oyuncuların eylemlerinin herhangi bir listesini $a = (a_1, a_2, \ldots, a_2) \in A$ ile ifade ediyoruz, öyle ki, $a_i \in A_i$ oyuncu i'nin eylemidir. Oyun (N, T, A, p) ile gösterilir.

Her zamanki gibi, bir oyuncunun stratejisi her bilgi kümesinde hangi eylemi seçeceğini belirler. Burada, bilgi kümeleri tiplere, $t_i \in T_i$, denk gelir. Dolayısıyla, oyuncu i'nin bir stratejisi $s_i : T_i \to A_i$ şeklinde, oyuncunun tiplerini eylemlerine atayan bir fonksiyondur. Mesela, yukarıdaki örnekte, işçinin dört stratejisi vardır: (Çalış,Çalış) - yüksek veya düşük kabiliyetli olmasından bağımsız olarak çalışacağı anlamına gelir, (Çalış, Kaytar) - yüksek kabiliyetli ise çalışacağıve düşük kabiliyetli ise kaytaracağı anlamına gelir, (Kaytar, Çalış) ve (Kaytar, Kaytar).

Bayesyen Nash dengesi Bayesyen bir oyunun Nash dengesidir. Mesela, $p > 1/2$ olduğu durumda, (İşe al, (Çalış, Kaytar)) Örnek 1'deki oyunun bir Bayesyen Nash dengesidir. Yani, firma işçiyi işe alır, işçi de eğer yüksek kabiliyetteyse çalışır, düşük kabiliyetteyse kaytarır. İşçinin tipinden bağımsız olarak kaytardığı ve firmanın işe almadığı başka bir Nash dengesi daha vardır.

Oyuncuların tipleri "ilişkili" olabilirler, yani bir oyuncu kendi tipini öğrenince diğer oyuncuların tipleri hakkında ne düşündüğünü "günceller". Kendi eylemini seçerken kendi tipini bildiğinden, kendi beklenen faydasını güncellediği inanışlarına göre maksimize eder. Oyunucların inanışlarını Bayes kuralını kullanarak güncellediğini varsayıyoruz.

Bayes Kuralı A ve B iki olay olsunlar, o zaman A'nın B'nin olmasına koşullu olasılığı

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

şeklindedir, öyle ki, $P(A \cap B)$ A ve B'nin aynı anda olma olasılığı ve $P(B)$ de B'nin (koşulsuz) olma olasılığıdır.

Eksik bilgili statik oyunlarda, Bayes kuralının uygulanışı çoyu zaman açık olacaktır, ancak eksik bilgili dinamik oyunları çalışmaya başladımızda Bayes kuralının önemi artacaktır.

$p_i(t'_{-i}|t_i)$, i'nin kendi tipi t_i iken, diğer tüm oyuncuların tiplerinin $t'_{-i} = (t'_1, t'_2, ..., t'_{i-1}, t'_{i+1}, \ldots, t'_n)$ olduğuna olan inanışını temsil etsin. [Eğer tipler oyuncular arasında ilişkili ise, Bayes kuralını kullanabiliriz. Eğer bağımsız iseler, hayat çok daha kolaydır. Bu durumda, oyuncular inanışlarını güncellemezler.]

Şimdi, Bayesyen Nash dengesini tanımlayabiliriz. Bir strateji vektörü $s^* = (s^*_1, ..., s^*_n)$ bir n-oyunculu eksik bilgili statik oyunun Bayesyen Nash dengesidir ancak ve ancak, her i oyuncusu ve tipi $t_i \in T_i$ için,

$$s^*_i(t^1_i) \in \arg\max_{a_i} \sum u_i \left[s^*_i(t_i), ..., a_i, ..., s^*_N(t_N)\right] \times p_i(t'_{-i}|t_i)$$

idir, öyle ki, u_i i oyuncusunun faydasını a_i de eylemini temsil eder. Yani, her i oyuncusu için, her muhtemel tip t_i, *koşullu inanışlar* $p_i(t'_{-i}|t_i)$ veriliyken *optimal* olan eylemi seçer. Belirtelim ki, i oyuncusunun u_i fayda fonksiyonu hem oyuncularıneylemlerine hem de tiplerine bağlıdır.[1] Yine belirtelim ki, bir Bayesyen Nash dengesi bir Bayesyen oyunun Nash dengesidir, öyle ki, her oyuncu en iyi tepkiyi oynar. [2]

Örnek 2 *(İşe al, (Çalış, Kaytar)) strateji vektörünün, örnek 1'deki oyunun,* $p > 1/2$

[1] u_i fayda fonksiyonu tüm $s_1, ..., s_n$ stratejilerine bağlı değildir, ama u_i'nin beklenen değeri muhtemelen bağlıdır.

[2] Bu özellik, tüm tipler pozitif olasılikla gerçekleşiyorsa, tüm Nash dengelerinde sağlanacak bir özelliktir.

olduğunda, bir Bayesyen Nash dengesi olduğunu kontrol edelim. İşçinin (Çalış, Kaytar) stratejisi veriliyken, firmanın işçiyi işe almaktan elde edeceği beklenen değer

$$u_F(Yuksek, IseAl, Calis)Pr(Yuksek) + u_F(Dusuk, IseAl, Kaytar)Pr(Dusuk)$$

$$= 1 \cdot p + (-1)(1-p) = 2p - 1$$

idir. İşçinin (Çalış, Kaytar) stratejisi veriliyken, firmanın işe almamaktan edineceği beklenen fayda

$$u_F(Yuksek, IseAlma, Calis)Pr(Yuksek) + u_F(Dusuk, IseAlma, Kaytar)Pr(Dusuk) = 0$$

idir. $p > 1/2$ *iken,* $2p - 1 > 0$ *dır ve dolayısıyla İşe al stratejisi firmanın beklenen değerinin maksimize etmektedir. İşçi için, her tip icin ayrı ayrı optimalliği kontrol etmemiz gerekiyor. Yüksek tip için,*

$$u_I(Yuksek, IseAl, Calis) = 2 > 1 = u_I(Yuksek, IseAl, Kaytar),$$

istenildiği gibi sağlanmaktadır. Düşük tip içinse,

$$u_I(Dusuk, IseAl, Kaytar) = 2 > 1 = u_I(Dusuk, IseAl, Calis),$$

sağlanır.

Alıştırma olarak, (İşe Alma, (Kaytar, Kaytar)) strateji vektörünün de Bayesyen Nash dengesi olduğunu kontrol edin. Sıradaki örnekte, her iki oyuncu da özel bilgiye sahip.

Örnek 3 Alttaki kazanç tablosunu düşünelim

1/2	L	R
X	θ, γ	$1, 2$
Y	$-1, \gamma$	$\theta, 0$

öyle ki, $\theta \in \{0, 2\}$ ve $\gamma \in \{1, 3\}$. Her oyuncu kendi kazancını biliyor, yani, 1. oyuncu θ'nın değerini, 2. oyuncu da γ'nın değerini biliyor. θ'nın değerinden bağımsız olarak, 1. oyuncu her iki γ değerinin de eşit olasılığa sahip olduğunu düşünüyor. Benzer şekilde, γ'nın değerinden bağımsız olarak, 2. oyuncu θ değerinin de eşit olasılığa sahip olduğunu düşünüyor. Bu oyunda, her iki oyuncunun da iki tipi var. 1. oyuncu 0 ve 2 tipine sahipken, 2. oyuncu da 1 ve 3 tiplerine sahip. Tüm tipler eşit olasılıklıdırlar, yani, $p(0,1) = p(0,3) = p(2,1) = p(2,3) = 1/4$. Bayesyen Nash dengesini hesaplarken, belirtmek gerekli ki, 1. oyuncunun $\theta = 0$ tipi için, X eylemi Y eylemini kesin domine eder, yani, 2. oyuncunun ne oynayacağından bağımsız olarak, tipi 0 iken X oynamak en iyi tepkidir. Dolayısıyla, herhangi bir s^* Bayesyen Nash dengesinde,

$$s_1^*(0) = X.$$

olmalıdır. Benzer şekilde, 2. oyuncunun $\gamma = 3$ tipi için, L eylemi kesin dominant bir stratejidir, dolayısıyla herhangi bir s^* Bayesyen Nash dengesi için

$$s_2^*(3) = L.$$

olmalıdır. Ayrıca, 1. oyuncunun $\theta = 2$ tipi ve 2. oyuncunun $\gamma = 1$ tipi için eylemleri belirlememiz gerekiyor. 1. oyuncunun $\theta = 2$ tipini düşünelim. Bu tip için, X eylemi bir en iyi tepkidir, ancak ve ancak, 2. oyuncunun L oynama olasılığı en az 1/4'tür. [3] $\theta = 2$ tipi içinse, dengede, L olasılığı en az 1/2'dir. Bunu görmek için, p, muhtemel bir karma stratejide $\gamma = 1$ tipinin L oynama olaşılığı olsun. O zaman,

$$Pr(s_2 = L) = Pr(\gamma = 3) \cdot 1 + Pr(\gamma = 1)p = 1/2 + p/2 \geq 1/2$$

idir. Dolayısıyla, herhangi bir Bayesyen Nash dengesi s^*'da, 1. oyuncunun $\theta = 2$ tipi X oynar, yani,

$$s_1^*(2) = X.$$

Son olarak, $\gamma = 1$ tipinin denge eyleminin ne olacağını belirlememiz gerekiyor. Herhangi bir dengede, $\gamma = 1$ tipi için L'den edineceği kazanç $\gamma = 1$'dır. R'den gelecek beklenen kazanç ise

$$u_2(s_1^*(0), R, 1)Pr(\theta = 0) + u_2(s_1^*(2), R, 1)Pr(\theta = 2)$$

$$u_2(X, R, 1)Pr(\theta = 0) + u_2(X, R, 1)Pr(\theta = 2) = u_2(X, R, 1) = 2 > 1$$

[3] $\theta = 2$ için, X'den gelen beklenen değer

$$u_1(X, L, 2)\, Pr(s_2 = L) + u_1(X, R, 2)\,(1 - Pr(s_2 = L)) = 2Pr(s_2 = L) + (1 - Pr(s_2 = L)) = Pr(s_2 = L) + 1$$

iken, Y'den gelen beklenen değer

$$u_1(Y, L, 2)\, Pr(s_2 = L) + u_1(Y, R, 2)\,(1 - Pr(s_2 = L)) = -Pr(s_2 = L) + 2(1 - Pr(s_2 = L)) = 2 - 3Pr(s_2 = L)$$

idir. X'in beklenen değeri $\Pr(s_2 = L) + 1$, Y'nin beklenen değerinden (yani, $2 - 3\Pr(s_2 = L)$) daha büyüktür ancak ve ancak $\Pr(s_2 = L) > 1/4$.

idir. Dolayısıyla, herhangi bir Bayesyen Nash dengesi s^*'da, $\gamma = 1$ tipi R oynar, yani,

$$s_2^*(1) = R.$$

Göstermiş olduk ki, tek bir Bayesyen Nash dengesi s^* vardır, öyle ki, $s_1^*(0) = s_1^*(2) = X$, $s_2^* = R$ ve $s_2^* = L$'dir.

Alttakiler, Gibbons'daki uygulamalara ilişkin notlardır.

Örnek Eksik Bilgili Cournot

$P(Q) = a - Q$

$Q = q_1 + q_2$

$c_1(q_1) = cq_1$

Her iki firma da risk-nötrdür.

2. firmanın tipleri (özel bilgi)

$$\begin{aligned} c_2(q_2) = {} & c_H q_2 \text{ with probability } \theta \\ & c_L q_2 \text{ with probability } 1 - \theta \end{aligned}$$

oyuncular için ortak bilgi.

Bayesyen Nash dengesinin nasıl bulmalıyız?

Firma 2'nin iki muhtemel tipi vardır ve bu farklı iki tip için farklı eylemler seçilecektir.

$q_2(c_L), q_2(c_H)$

Firma 2'nin tipi yüksek tip (H) olsun.

$\Rightarrow$

$\max_{q_2}(P - c_H)q_2 = [a - q_1 - q_2 - c_H]q_2$

q_1 verili iken.

$$\Rightarrow q_2^*(c_H) = \frac{a - q_1^* - c_H}{2} \qquad (*)$$

Benzer şekilde, firma 2 düşük tip olsun:

$$\max_{q_2} \left[a - q_1^* - q_2 - c_L\right] q_2$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - q_1^* - c_L}{2} \qquad (**)$$

Önemli bir nokta: Her iki durumda da aynı q_1. Neden?

Firma 1'in problemi

$$\begin{aligned}
& \max_{q_1} \theta \left[a - q_1 - q_2^*(c_H)\right] q_1 + (1-\theta)\left[a - q_1 - q_2^*(c_L)\right] q_1 \\
= & \max_{q_1} \left\{a - q_1 - \left[\theta q_2^*(c_H) + (1-\theta) q_2^*(c_L)\right]\right\} q_1 .
\end{aligned}$$

$$q_1^* = \frac{a - E\left[q_2\right]}{2} = \frac{a - \left[\theta q_2^*(c_H) + (1-\theta) q_2^*(c_L)\right]}{2} \qquad (***)$$

*,** ve ***'dakileri $q_1, q_2(c_L)$ ve $q_2(c_H)$ için çözersek

$$\begin{aligned}
q_2^*(c_H) &= \frac{a - 2c_H}{3} + \frac{(1-\theta)(c_H - c_L)}{6} \\
q_2^*(c_L) &= \frac{a - 2c_L}{3} - \frac{\theta(c_H - c_L)}{6} \\
q_1^* &= \frac{a + \theta c_H + (1-\theta) c_L}{3} .
\end{aligned}$$

Harsanyi'nin Karma stratejiler için açıklaması

	O	F
O	$2+t_1, 1$	$0, 0$
F	$0, 0$	$1, 2+t_2$

t_1 ve t_2 oyuncuların özel bilgisi.

t_1 ve t_2 $[0, X]$ üzerine bağımsız bir tekdüze (uniform) dağılım olsun.

Harsanyi gösterir ki, $X \to 0$ iken (belirsizlik ortadan kalkarken), 1. oyuncunun 2/3 olasılıkla O oynadığı, 2. oyuncununsa 2/3 olasılıkla F oynadığı bir karma strateji dengesine yakınsarız. Ayrıntılar için Gibbons'a bakınız.

İhaleler

Tek bir mal icin iki teklifçi.

v_i: i teklifçisinin mala biçtiği değer.

Varsayalım ki, v_i'ler $[0, 1]$ üzerine bağımsız tekdüze (uniform) dağılımdan çekiliyorlar. v_i i oyuncusunun özel bilgisidir. Oyun her iki teklifçinin birer teklif vermesi ve sonra da en

yüksek teklifi verenin kazanması ve kendi teklifini ödemesi şeklinde oynanır.
Diyelm ki, b_i i oyuncusunun teklifi olsun.

$$v_i(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{if } b_i > b_j, \\ \frac{v_i - b_i}{2} & \text{if } b_i = b_j, \\ 0 & \text{if } b_i < b_j. \end{cases}$$

$$\max_{b_i}(v_i - b_i)\Pr\{b_i > b_j(v_j) : i'\text{nin inanışları veriliyken}\} + \frac{1}{2}(v_i - b_i)\Pr\{b_i = b_j(v_j) : i'\text{nin inanışları veriliyken}\}$$

$$\frac{1}{2}(v_i - b_i)\Pr\{b_i = b_j(v_j) : i'\text{nin inanışları veriliyken}\} = 0$$

sürekli (sonsuz) olasılık bulunduğundan dolayı.

Önce dengesinin şekline dair bir öngörüde bulunalım. Öngörü: Simetrik ve lineer denge

$$b = a + cv$$

O zaman,

$$\max_{b_i}(v_i - b_i)\Pr\{b_i > a + cv_j\} =$$

$$(v_i - b_i)\Pr\{v_j \leq \frac{b_i - a}{c}\} = (v_i - b_i)\{\frac{b_i - a}{c}\}$$

FOC:

$$b_i = \frac{v_i + a}{2} \text{ eğer } v_i \geq a$$
$$= a \quad \text{eğer } v_i \leq a$$

Lineer bir strateji, lineer bir stratejiye en iyi tepkiyse, $a = 0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow b_i = \frac{1}{2}v_i$$

$$b_i = \frac{1}{2}v_j$$

Çifte İhale

Satıcı P_s söyler
AlıcıP_b söyler

$P_b < P_s$ alışveriş olmaz
$P_b \geq P_s$ alışveriş $p = \frac{P_b+P_s}{2}$ fiyatında olur
Değerler özel bilgidir, V_b (0,1) üzerine tekdüze (uniform) dağılmıştır
V_s (0,1) üzerine tekdüze dağılmıştır ve V_b'den bağımsızdır.
Stratejiler $P_b(V_b)$ ve $P_s(V_s)$
Alıcı

$$\max_{P_b} \left[V_b - \frac{P_b + E\left[P_s(V_s) : P_b \geq P_s(V_s)\right]}{2} \right] \cdot Prob\left[P_b \geq P_s(V_s)\right]$$

problemini çözer, öyle ki, $E\left[P_s(V_s) : P_b \geq P_s(V_s)\right]$ P_b nin $P_s(V_s)$den büyük olma koşulu altında satıcının beklenen teklifidir.

Benzer şekilde, satıcı da, aşağıdaki ifadeyi maksimize eder.

$$\max_{P_s} \left[P_s + E\left[P_b(V_b) : P_b(V_b) \geq P_s\right] - (V_s)\right] \cdot Prob\left[P_b(V_b) \geq P_s\right]$$

Denge
$P_s(V_s)$, $P_b(V_b)$'ye en iyi tepki
$P_b(V_b)$, $P_s(V_s)$'ye en iyi tepki

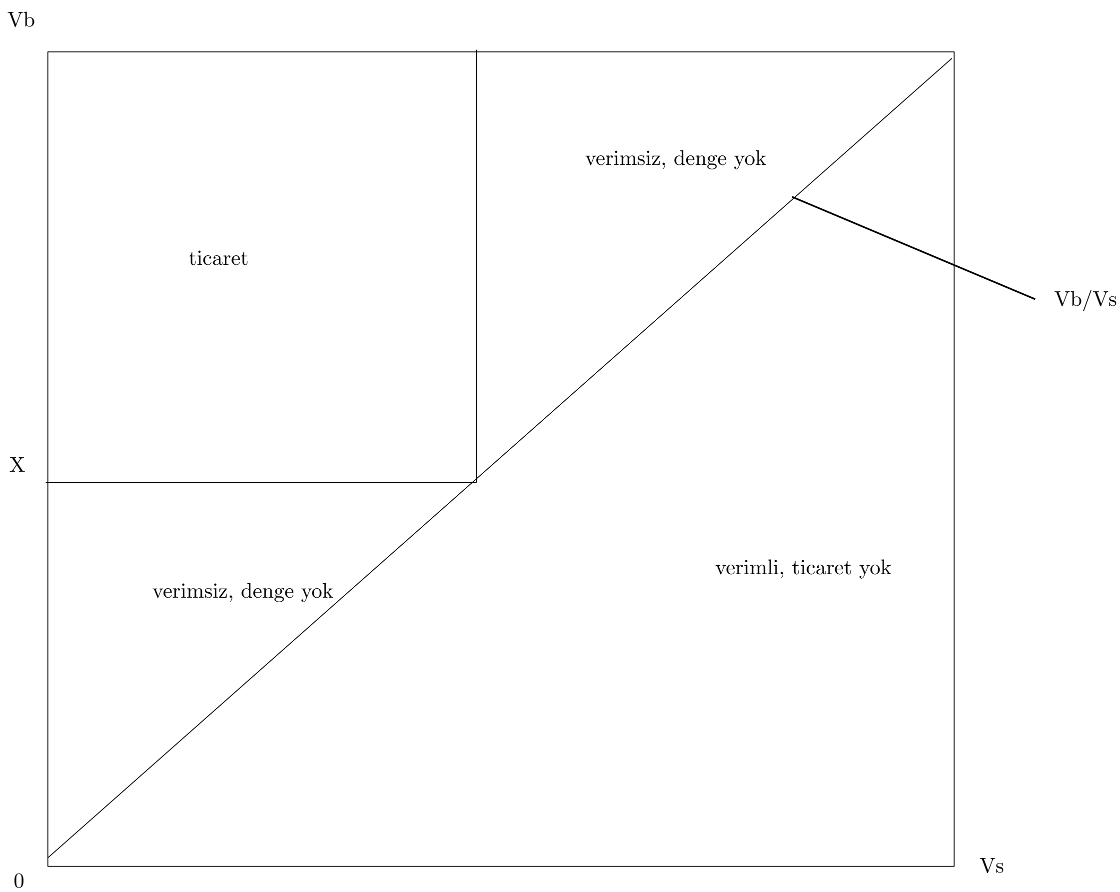
Bayesyen Nash Dengeleri?

Birçok denge var: Bazı örnekler oluşturalım

1. Satıcı $P_s = X$ eğer $V_s \leq X$
$P_b = X$ eğer $V_b \geq X$

"Sabit" fiyatlı bir denge.

Bu neden bir dengedir? Çünkü, eğer $V_s \leq X$ iken $P_s = X$ ise, alıcı $V_b < X$ iken alıveriş yapmak istemez, $V_b > X$ iken ise, $P_b = X$ optimaldir.



Başka dengeler için Gibbons'a bakınız.