14.12 Oyun Teorisi Ders Notları

Muhamet Yıldız

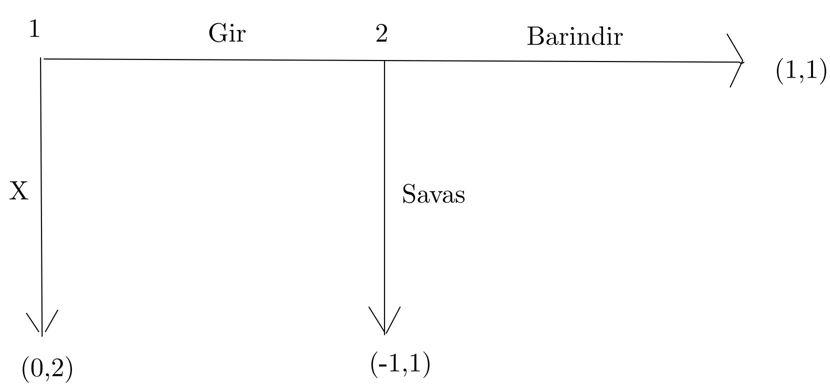
Ders 12-13

1 Tekrarlı Oyunlar

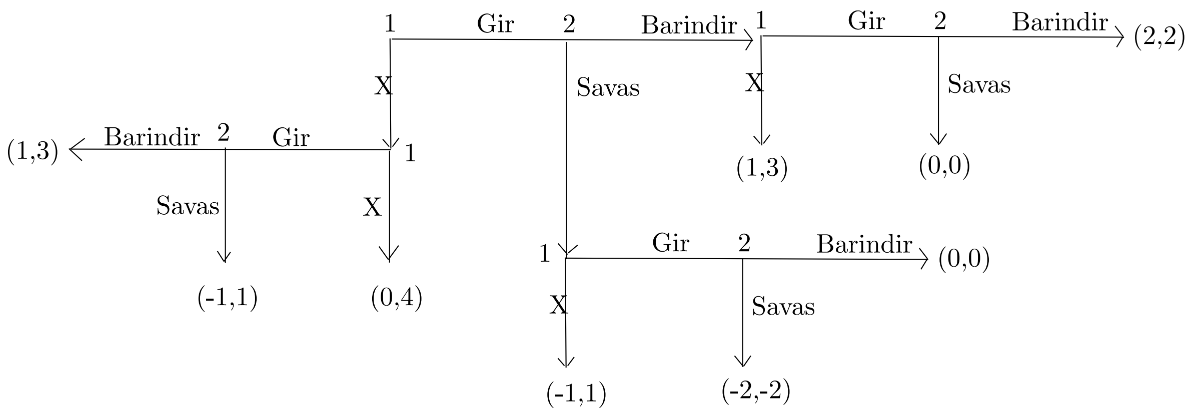
Bu ders notlarında, daha küçük bir oyunun tekrarlandığı ve bu tekrarlanan küçük oyunun statik oyun adını aldığı oyunları tartışacağız. Statik oyun önceki tekrarlarda ne oynandığın-dan bağımsız olarak tekrarlanır. Yapacağımız analizde, statik oyunun sonlu mu yoksa sonsuz defa mı tekrarlandığı ve oyuncuların önceki oyunlarda diğer oyuncuların ne oynadıklarını gözlemleyip gözlemlememeleri oldukça önemlidir.

1.1 Gözlemlenebilir eylemli sonlu tekrarlı oyunlar

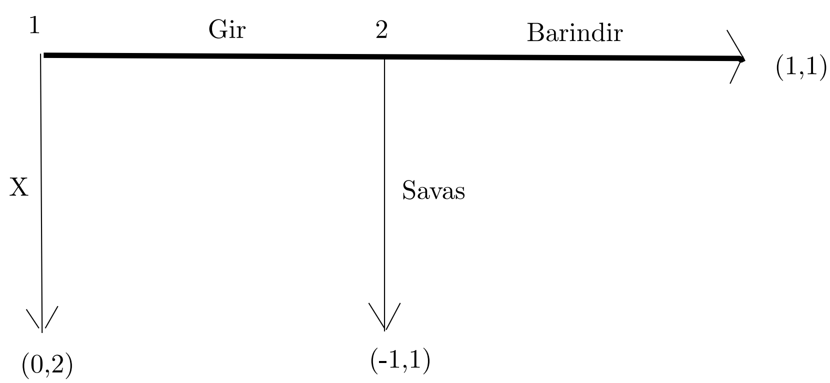
Öncelikle statik oyunun sonlu defa tekrarlandığı ve her bir tekrarın başında her oyuncunun diğer oyuncuların önceki tekrarlarda ne oynadıklarını hatırladığı oyunları düşüneceğiz. Şimdi, bir girişimcinin (1) bir piyasaya girip girmeme kararı verdiği ve hakim firmanın da (2) girişimciyle savaşma ya da onu barındırma kararı verdği, girişimden caydırma oyununu düşünelim.



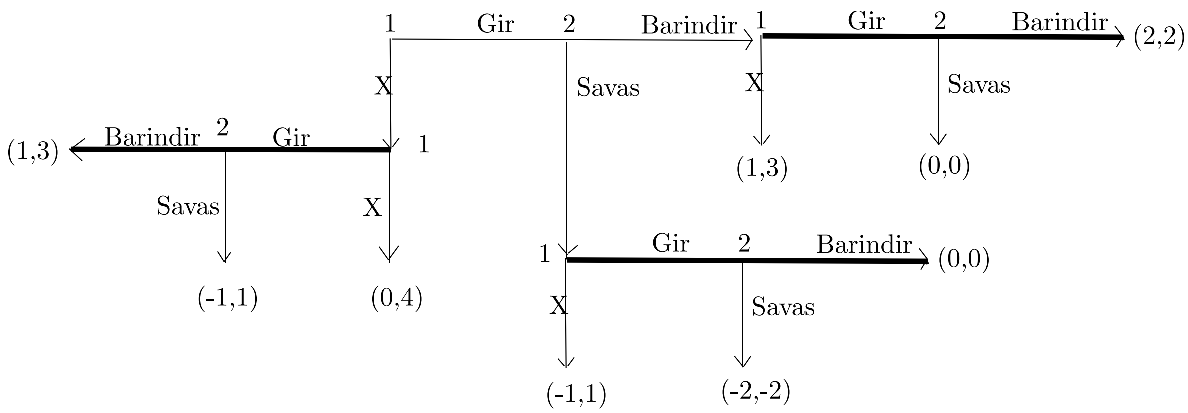
Bu girişimden caydırma oyununun iki defa tekrarlandığı ve tüm geçmiş eylemlerin gözlemlendiği oyunu düşünelim. Varsayalım ki, oyuncular sadece statik oyunlardaki kazanç-larının toplamına bakıyor olsunlar. Oyun alttaki resimde çizilmiştir.



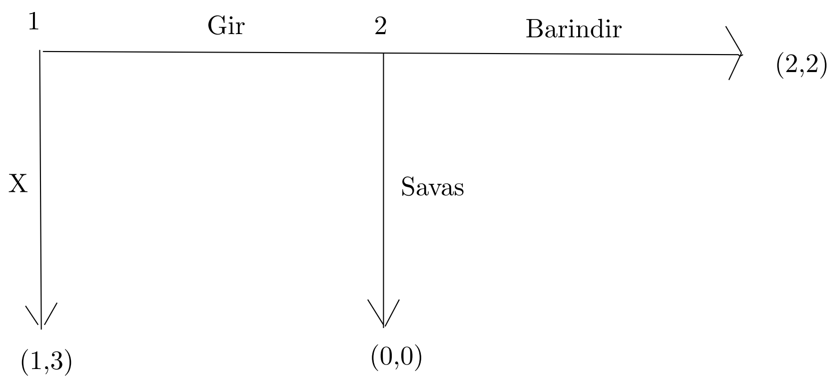
İlk oyunun herbir sonucundan sonra, girişimden caydırma oyunu bir kez daha oynanıyor-ilk oyundan gelen kazanç herbir sonuca eklenmiştir. Bir oyuncunun lotaryalar üzerine olan tercihleri, fayda fonksiyonuna bir sayı eklediğimizde değişmeyeceğinden, ikinci "gün" oynanan herbir oyun statik oyunla (girişimden caydırma oyunuyla) aynıdır. Statik oyunun, hakim firmanın girişimciyi barındırdığı ve girişimcinin de bunu öngörüp piyasaya girdiği, tek bir alt-oyun mükemmel dengesi vardır.



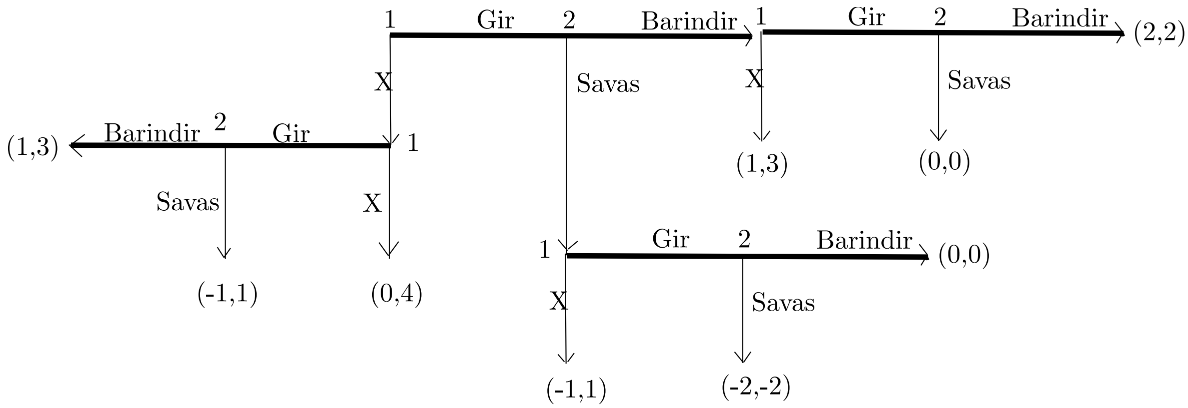
Bu durumda, ikinci gün oynanan her bir oyunun alt-oyun mükemmel dengesi bu dengedir. Bu altta çizilmiştir.



Geriye doğru tümevarım kullanarak, oyunu alttaki oyuna indirgiyoruz.



Dikkat edilirse ikinci günden gelen ve bir tek olan alt-oyun mükemmel denge kazancı olan 1'i statik oyundaki her kazanca ekledik. Tekrarlarsak, bir oyuncunun kazançlarına sabit bir sayı eklemek oyunu değiştirmez, bu yüzden de, indirgenmiş oyunun tek alt-oyun mükemmel dengesi statik oyundaki aynı alt-oyun mükemmel dengesidir. Dolayısıyla,tek alt-oyun mükemmel denge alttaki şekilde çizilmiştir.



Bu genellenebilir. Başka bir deyişle, herhangi bir gözlemlenebilir eylemli ve sonlu defa tekrarlanan oyun aldığımızda, eğer statik oyunun tek bir alt-oyun mükemmel dengesi varsa, o zaman tekrarlanan oyunun da tek bir alt-oyun mükemmel dengesi vardır, ve bu dengede statik oyunun alt-oyun mükemmel dengesi herbir tekrarda oynanır.

Eğer statik oyunun birden fazla dengesi varsa, o zaman tekrarlı oyunda, oyuncuların statik oyunun alt-oyun mükemmel dengesinde oynanmayan bazı eylemleri bazı tekrarlarda oynadıkları bazı alt-oyun mükemmel dengeleri olabilir. İkinci gün oynanacak denge ilk gün ne oynanacağına koşullanabilir ve bu durumda ilk güne ”indirgenmiş oyun” artık statik oyunla aynı değildir ve dolayısıyla başka dengeler içerebilir. **Bunu görmek için Gibbons’a bakınız.**

1.2 Gözlemlenebilir eylemli sonsuz tekrarlı oyunlar

Şimdi, her tekrarın başlangıcında geçmişteki tüm eylemlerin ortak bilgi olduğu sonsuz tekrarlı oyunları düşünelim. Sonsuz tekrarlı bir oyunda, toplam sonsuz olduğu için, her bir tekrardan gelen kazançları olduğu gibi toplayamayız. Bu oyunlar için, oyuncuların her tekrardan aldıkları kazançların iskontolu toplamını maksimize ettikleri durumlara odaklanacağız. $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_t, \ldots)$ gibi bir kazanç akşının *bugünkü değeri*

$$PV(\pi; \delta) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_t = \pi_0 + \delta\pi_1 + \cdots + \delta^t \pi_t + \cdots,$$

şeklinde hesaplanır, öyle ki, $\delta \in (0, 1)$ iskonto faktörüdür. *Ortalama değerden* kasıt ise

$$(1-\delta)\,PV\,(\pi;\delta) \equiv (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t \pi_t.$$

idir. Farkedelim ki, sabit bir kazanç akışımız varsa (yani, $\pi_0 = \pi_1 = \cdots = \pi_t = \cdots$), ortalama değer statik kazançtır (yani, π_0). Bugünkü ve ortalama değerler şu anki güne göre hesaplanabilirler. Başka bir deyişle, herhangi bir t'de, t'deki bugünkü değer

$$PV_t\,(\pi;\delta) = \sum_{s=t}^{\infty}\delta^{s-t}\pi_s = \pi_t + \delta\pi_{t+1} + \cdots + \delta^k \pi_{t+k} + \cdots .$$

şeklindedir.

Açıktır ki,

$$PV\,(\pi;\delta) = \pi_0 + \delta\pi_1 + \cdots + \delta^{t-1}\pi_{t-1} + \delta^t PV_t\,(\pi;\delta)\,.$$

Dolayısıyla, analiz PV veya PV_t kullanmamıza göre değişmez, ama PV_t kullanımı daha kolaydır.

Sonsuz tekrarlı oyunların en temel özelliği, oyuncular daha sabırlı oldukça, yani $\delta \to 1$, denge kümesi çok büyük hale gelir. Her oyuncuya statik oyunun herhangi bir Nash dengesinden daha fazla veren herhangi bir kazanç vektörü için, yeteri kadar yüksek δ'lar için, eldeki kazanç vektörünü kazanç akşının ortalama değeri olarak veren bir alt-oyun mükemmel dengesi vardır. Bu, folk teoremi olarak bilinir. **Detaylar için Gibbons'a bakınız.**

Bu oyunlarda, bir strateji vektörünün, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ alt-oyun mükemmel dengesi olup olmadığını kontrol etmek için, *tek-sapma prensibini* kullanıyoruz. Tanımı şöyledir.[1] Oyuncu i'nin oynayacağı ve s stateji vektörüne göre statik oyunun a^* stratejisini oynayacağı herhangi bir bilgi kümesi alalım. Varsayalım ki, bu bilgi kümesi ulaşılsın, her $j \neq i$ oyunun geri kalanında kendi s_j stratejisine sadık kalsın ve oyuncu i oyunun geri kalanında s_i stratejisine eldeki bilgi kümesi dışında sadık kalsın. Tüm bunların ışığında, oyuncunun bu bilgi kümesinde başka bir a' eylemine (a^*'dan vazgeçerek) sapma isteğinin olup olmadığını kontrol ediyoruz. [Dikkat

[1] Bir strateji vektörü s_i, statik oyunun önceki tekrarlarında her oyuncunun hangi eylemi yaptığına bağlı olarak t'de statik oyunun hangi stratejisinin oynanacağını belirleyen a_t fonksiyonlarının $s_i = (a_0, a_1, ..., a_t, ...)$ şeklinde bir sonsuz dizisidir.

edilirse, tüm oyuncuların, i'de dahil, oyunun geri kalanında bu strateji vektörüne sadık kalacaklarını varsayıyoruz.] Tek-sapma prensibi der ki, oyuncunun bu anlamda sapacağı hiçbir bilgi kümesi yoksa, o zaman strateji vektörü bir alt-oyun mükemmel dengesidir.

Girişimden caydırma oyununun sonsuz tekrarlı versiyonunu analiz edelim. Şöyle bir strateji vektörü düşünelim. Herhangi bir tekrarda, girişimci piyasaya girer ancak ve ancak hakim firma girişimciyi geçmişte bir zaman barındırmıştır. (Bu, başlarda hakim firmanın girişimci ile piyasaya girdiği durumlarda savaşacağı ve girişimcinin de piyasaya girmediği, bir geçiş stratejisidir. Eğer hakim firma girişimciyi barındıracak olursa, girişimcinin piyasaya girdiği ve hakim firmanın da her zaman girişimciyi barındırdığı yeni bir rejime geçiş yaparlar.) Büyük δ değerleri için, bu bir dengedir.

Bunun denge olup olmadığını kontrol etmek için, tek-sapma prensibini kullanıyoruz. Öncelikle bir t zamanı ve hakim firmanın girişimciyi barındırageldiği bir (t'de) bir geçmiş alıyoruz. Hakim firma, kendi stratejisine göre, oyunun geri kalan kısmında girişimciyi her zaman barındıracaktır ve girişimci de her zaman piyasaya girecektir (yine kendi stratejisine göre). Dolayısıyla, hakim firmanın $t+1$'den itibaren kazanacağı devam değeri (yani, dengedeki kazanç akşının hakim firma için bugünkü değeri)

$$V_A = 1 + \delta + \delta^2 + \cdots = 1/\left(1-\delta\right).$$

şeklindedir.

Eğer hakim firma t'de barındırırsa, bugünkü değeri (t'de) $1+\delta V_A$ olacaktır. Eğer savaşırsa, o zaman bugünkü değeri $-1+\delta V_A$ olacaktır. Dolayısıyla, hakim firmanın stratejisindeki barındırmak yerine savaşmaya hiç niyeti yoktur. Girişimcinin $t+1$'den itibaren alacağıdevam değeri yine t'de ne olduğundan bağımsızdır, dolayısıyla girişimci, sapmak (o halde, $0+\delta$ kazanacaktır [$t+1$'deki bugünkü değeri]) yerine piyasaya girecektir (o halde, $1+\delta$ kazanacaktır [$t+1$'deki bugünkü değeri])

Şimdi, t zamanında bir geçmiş düşünelim, öyle ki, hakim firma daha önce girişimciyi hiç barındırmamış olsun. Hakim firmanın bilgi kümesini düşünelim. Eğer, girişimciyi barındırırsa, $t+1$'den itibaren alacağı devam değeri $V_A = 1/(1-\delta)$ olacaktır, ve t'den itibaren alacağı devam değeriyse $1+\delta V_A = 1+\delta/(1-\delta)$ olacaktır. Eğer, savaşırsa, strateji vektörüne göre, ileride hiçbir girişimi barındırmayacaktır ve girişimci hiçbir zaman piyasaya girmeyecektir, ki bu durumda, hakim firma sabit kazanç akışı olarak 2 kazanacaktır ve bunun $t+1$'deki bugünkü değeri $2/(1-\delta)$'dır. Dolayısıyla, bu durumda, t'den itibaren devam değeri $-1+\delta\cdot 2/(1-\delta)$ olacaktır. Dolayısıyla, hakim firmanın sapma (ve girişimciyi barındırma) eğilimi yoktur ancak ve ancak

$$-1+\delta\cdot 2/(1-\delta)\geq 1+\delta/(1-\delta)$$

ancak ve ancak,

$$\delta\geq 2/3$$

Bu koşul sağlandığında, hakim firmanın bu tip geçmişlerde stratejisinden sapma eğilimi yoktur. Şimdi, eğer girişimci piyasaya girerse, hakim firma savaşacaktır ve girişimci gelecekte hiçbir zaman piyasaya girmeyecektir, ki bu durumda devam değeri -1 olacaktır. Eğer piyasaya girmezse, devam değeri 0 olacaktır. Dolayısıyla, o da piyasaya girmek istemeyecektir. Tüm muhtemel geçmişlere baktığımızdan dolayı, tek-sapma prensibine dayanarak, bu strateji vektörü bir alt-oyun mükemmel dengesidir ancak ve ancak $\delta\geq 2/3$.

Şimdi, tutuklular ikileminde işbirliğini, Cournot duopolisinde dolaylı kartel ve Gibbons'daki diğer örnekleri çalışın.